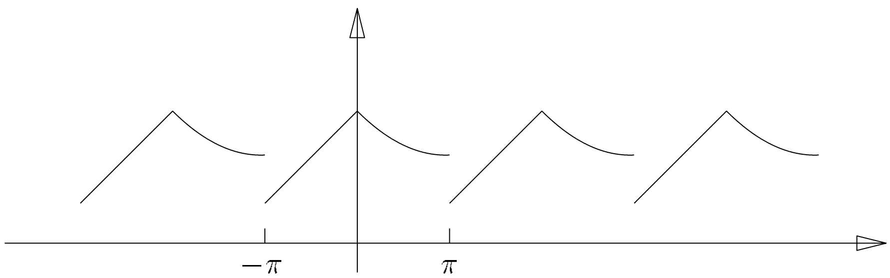
Fourier'n sarjat

Simo K. Kivelä

Fourier, Jean-Baptiste-Joseph 1768 – 1830. Ranskalainen matemaatikko, École Normalen ja École Polytechniquen professori, Napoleonin suosikki. Loi lämpöoppia käsittelevässä teoksessaan *Théorie analytique de la chaleur* myöhemmin Fourier-analyysina tunnetun matematiikan alan.

1 Fourier'n kertoimet

Olkoon annettuna reaalimuuttujan reaali- tai kompleksiarvoinen funktio f, jolla on jaksona 2π. Tämän ei tarvitse olla jatkuva, mutta kylläkin integroituva jakson pituisen välin yli. Tyypillisesti f on seuraavan kuvan mukainen.



Kuva 1: PALOITTAIN JATKUVA FUNKTIO.

Fourier'n sarjan eksponenttimuoto on

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Tämän osasummat ovat

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

ja sarjan pisteittäinen suppeneminen tarkoittaa osasummien raja-arvon olemassaoloa tavanomaiseen tapaan. Kertoimet c_k ovat kompleksilukuja. Muuttuja x on reaalinen.

Kompleksisella eksponenttifunktiolla on seuraavat ominaisuudet, joita toistuvasti tarvitaan; tässä k on kokonaisluku.

$$\begin{aligned}
&e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \quad \text{(Eulerin kaava)};\\
&e^{ik\pi} = \cos k\pi + i \sin k\pi = (-1)^k, \quad e^{-ik\pi} = 1/e^{ik\pi} = (-1)^k;\\
&\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikx}}{ik} = \frac{1}{ik}(e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}) = 0, \quad \text{jos } k \neq 0;\\
&\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \quad \text{jos } k = 0.
\end{aligned}$$

Eulerin kaavasta seuraa erityisesti, että jos Fourier'n sarja suppenee, sen summa on 2π-jaksoinen funktio.

Pyrkimyksenä on esittää annettu funktio f Fourier'n sarjana:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Jos sarja suppenee tasaisesti — mikä ei läheskään aina pidä paikkaansa vaikka sarja suppenisi pisteittäin — voidaan eo. yhtälö puolittain kertoa tekijällä e^{-ipx} ($p \in \mathbb{Z}$) ja integroida jakson yli; sarja integroidaan termeittäin:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ipx}\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-p)x}\,dx = 2\pi c_p.$$

Sarjan termien integraalit ovat edellä sanotun mukaan $= 0$, jos $k - p \neq 0$. Ainoa nollasta eroava termi saadaan indeksillä $k = p$.

Kertoimet

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovat funktiota f vastaavat *Fourier'n kertoimet*. Näiden avulla muodostettu sarja on funktion *eksponenttimuotoinen Fourier'n sarja*:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Tässä ei käytetä yhtäläisyysmerkkiä, koska sarja ei aina (ainakaan kaikilla arvoilla x) suppene kohden funktiota f. Kyseessä on vain funktion f avulla muodostettu sarja.

Fourier'n sarjan trigonometrinen muoto saadaan lausumalla eksponenttifunktiot sinin ja kosinin avulla:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx})\\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(c_k + c_{-k})\cos kx + i(c_k - c_{-k})\sin kx].\end{aligned}$$

Tässä esiintyvät kertoimet ovat

$$\begin{aligned}a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-ikx} + e^{ikx})\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k \ge 1;\\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)i(e^{-ikx} - e^{ikx})\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k \ge 1;\\ c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx = \frac{a_0}{2}.\end{aligned}$$

Trigonometrinen muoto on siten

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

missä

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = c_k + c_{-k}, \quad k \ge 0,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = i(c_k - c_{-k}), \quad k \ge 1.\end{aligned}$$

Esimerkki 1.1 Olkoon f funktio, jonka jaksona on 2π ja jolle pätee

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } -\pi < x \le 0,\\ 1, & \text{jos } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

Fourier'n kertoimet ovat

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikx}\,dx = -\frac{1}{2\pi ik}\Big/_0^{\pi} e^{-ikx} = \frac{i}{2\pi k}(e^{-ik\pi} - 1)\\ &= \frac{i}{2\pi k}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{jos } k \text{ on parillinen, } k \ne 0,\\ -\dfrac{i}{\pi k}, & \text{jos } k \text{ on pariton,}\end{cases}\\ c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Fourier'n sarjan eksponenttimuoto on tällöin

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2j+1)x}}{2j+1}.$$

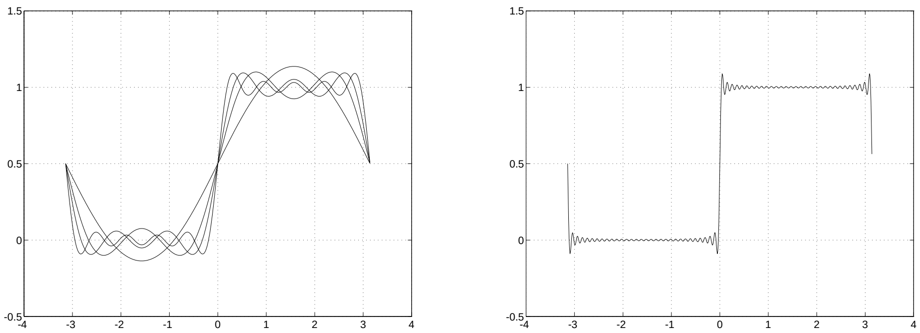
Trigonometrisen muodon kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 = 1, \\ a_k &= c_k + c_{-k} = 0, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \begin{cases} 0, & \text{jos } k \text{ on parillinen,} \\ i\Big(-\dfrac{i}{\pi k} - \dfrac{i}{\pi k}\Big) = \dfrac{2}{\pi k}, & \text{jos } k \text{ on pariton,} \end{cases} \end{aligned}$$

ja itse sarja siis

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin(2j+1)x}{2j+1}.$$

□



Kuva 2: Esimerkkifunktion osasummat s_0, s_1, s_2, s_4 sekä s_{30}.

Fourier'n sarjaksi kehitettävän funktion jakso voi olla muutakin kuin 2π. Olkoon tarkasteltavana funktio $f(t)$, jonka jaksona on $2p$. Sijoituksen

$$t = \frac{p}{\pi}x, \qquad t \in \,]-p, p] \iff x \in \,]-\pi, \pi],$$

avulla saadaan tällöin 2π-jaksoinen funktio $f(px/\pi)$. Tämän Fourier'n sarja voidaan muodostaa edellä kuvatulla tavalla, jolloin

$$f(t) = f\Big(\frac{p}{\pi}x\Big) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi t/p}.$$

Muuntamalla samalla sijotuksella integraali, josta kerroin c_k lasketaan, saadaan

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f\Big(\frac{p}{\pi}x\Big)\,dx = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} e^{-ik\pi t/p} f(t)\,dt.$$

Trigonometrinen muoto on vastaavasti

$$\begin{aligned}
f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi t}{p} + b_k \sin\frac{k\pi t}{p}), \\
a_k &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \cos\frac{k\pi t}{p}\, f(t)\, dt, \quad k \geq 0, \\
b_k &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \sin\frac{k\pi t}{p}\, f(t)\, dt, \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

2 Fourier'n sarjan suppeneminen

Olkoon funktio f jaksollinen funktio jaksona yksinkertaisuuden vuoksi 2π. Funktiota kutsutaan *palajatkuvaksi* eli *paloittain jatkuvaksi*, jos sillä on jakson pituisella välillä vain äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä ja näissä vasemman- ja oikeanpuoliset raja-arvot ovat olemassa (mutta ovat eri suuret). Jokaisessa pisteessä funktiolla on siis *hyppyepäjatkuvuus*.

Funktion Fourier'n sarjan suppenemista (sekä eksponenttimuotoisen että trigonometrisen, kyseessä on sama sarja kahteen eri muotoon kirjoitettuna) voidaan tarkastella kolmen eri suppenemiskäsitteen mielessä:

Merkitään tavanomaiseen tapaan

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Sarja *suppenee pisteittäin* kohden funktiota $f(x)$, jos $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ jokaisella arvolla x eli

$$\lim_{n\to\infty} |s_n(x) - f(x)| = 0 \quad \text{kaikilla } x \in [-\pi, \pi].$$

Sarja *suppenee tasaisesti* kohden funktiota $f(x)$, jos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |s_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

Sarja *suppenee kvadraattisesti* kohden funktiota $f(x)$, jos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)|^2\, dx = 0.$$

Eri suppenemiskäsitteet eivät ole yhtäpitäviä. Tasaisesta suppenemisesta seuraa pisteittäinen suppeneminen, samoin kvadraattinen, kuten helposti voidaan todistaa. Vastaesimerkeillä nahdään, että nämä eivät ole käännettävissä: tasainen suppeneminen ei seuraa pisteittäisestä suppenemisesta, ei myöskään kvadraattisesta. Pisteittäisestä suppenemisesta ei seuraa kvadraattista eikä myöskään kvadraattisesta pisteittäistä.

Fourier'n sarjan suppenemisen selvittävät seuraavat lauseet, joiden todistukset sivuutetaan:

Lause 2.1 *Olkoon 2π-jaksoinen funktio f palajatkuva ja olkoon sen derivaatta olemassa muualla paitsi äärellisen monessa pisteessä. Pisteessä x_0, jossa f on jatkuva, suppenee funktion Fourier'n sarja tällöin kohden funktion arvoa $f(x_0)$. Epäjatkuvuuspisteessä x_0 sarja suppenee kohden vasemman- ja oikeanpuolisen raja-arvon keskiarvoa:*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \frac{1}{2}[\lim_{x\to x_0-} f(x) + \lim_{x\to x_0+} f(x)].$$

Lause 2.2 *Jos 2π-jaksoinen funktio f on jatkuva ja sen derivaatta f' on palajatkuva, niin funktion Fourier'n sarja suppenee tasaisesti kohden funktiota.*

Lause 2.3 *Jos 2π-jaksoisen funktion f itseisarvon neliö on integroituva jakson pituisen välin yli, ts. integraali $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx$ on olemassa, niin funktion Fourier'n sarja suppenee kvadraattisesti kohden funktiota.*

Kvadraattinen suppeneminen on Fourier'n sarjan luonnollisin suppenemiskäsite: Funktiosta ei tarvitse olettaa muuta kuin itseisarvon neliön integroituvuus, mikä toisaalta on välttämätöntä myös kertoimien laskemista varten. (Itseisarvon neliöstä puhuminen pelkän neliön sijasta on sikäli välttämätöntä, että kompleksiarvoisen funktion tapauksessa nämä eivät ole samoja.)

Jos funktion f itseisarvon neliö on integroituva, pätee seuraava:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - s_n(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}|^2\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\Big)\Big(\overline{f(x)} - \sum_{j=-n}^{n} \bar{c}_j e^{-ijx}\Big)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx - \sum_{j=-n}^{n}\bar{c}_j\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijx}f(x)\,dx - \sum_{k=-n}^{n} c_k\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{f(x)}\,dx \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n} c_k\bar{c}_j\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x}\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx - 2\pi\sum_{j=-n}^{n}|c_j|^2 - 2\pi\sum_{k=-n}^{n}|c_k| + 2\pi\sum_{j=-n}^{n}|c_j|^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx - 2\pi\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2,
\end{aligned}$$

missä integraalit on tunnistettu Fourier'n kertoimen ja sen liittoluvun lausekkeista peräisin oleviksi ja todettu, että kaksinkertaisen summan termit eroavat nollasta vain summeerausindeksien ollessa yhtä suuret, jolloin termissä olevan integraalin arvo on 2π.

Yhtälöketjun ensimmäinen lauseke on itseisarvon neliön integraalina ≥ 0, jolloin viimeisen lausekkeen tulee myös olla ≥ 0. Saadaan *Besselin epäyhtälö*:

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

Antamalla $n \to \infty$ ja vetoamalla kvadraattiseen suppenemiseen saadaan *Parsevalin yhtälö*:

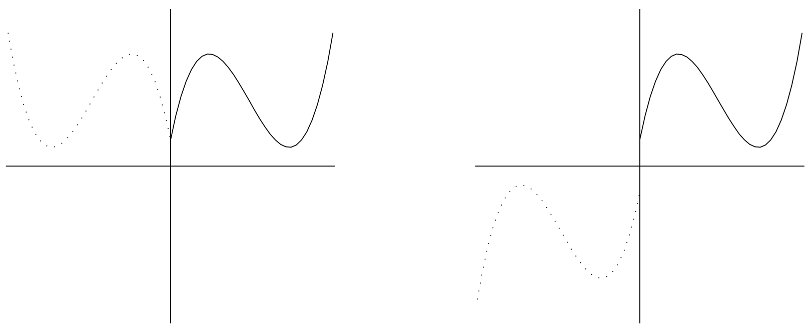
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

3 Sini- ja kosinisarjat

Olkoon annettuna puolijaksolla määritelty funktio $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$. Tälle voidaan muodostaa pelkästään sinitermeistä muodostuva trigonometrinen Fourier'n sarja tai yhtä hyvin pelkästään kosinitermeistä muodostuva. Menettely on seuraava.

Funktion f *parillinen jatko* välille $]-\pi, 0[$ saadaan määrittelemällä $f(-x) = f(x)$, $x \in]0, \pi[$. Tuloksena on parillinen funktio $f_e(x)$, joka voidaan jatkaa 2π-jaksoisena koko reaaliakselille.

Pariton jatko määritellään vastaavasti asettamalla $f(-x) = -f(x)$, jolloin syntyy pariton funktio $f_o(x)$. Tämäkin voidaan jatkaa koko reaaliakselille 2π-jaksoisesti.



Kuva 3: Funktion parillinen ja pariton jatko.

Funktion f_e Fourier'n sarjan kertoimet ovat

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_e(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_e(x)\sin kx\,dx = 0,$$

koska $f_e(x)\cos kx$ on parillinen funktio ja $f_e(x)\sin kx$ on pariton funktio. Tuloksena saadaan funktiolle f välillä $]0,\pi[$ puhdas kosinisarja

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

Tämä on itse asiassa parillisen jatkon f_e Fourier'n sarja ja esimerkiksi sen suppenemiskysymykset on tutkittava tähän perustuen.

Vastaavalla tavalla saadaan funktion f_o Fourier'n kertoimet

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_o(x)\cos kx\,dx = 0,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_o(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

koska $f_o(x)\cos kx$ on pariton funktio ja $f_e(x)\sin kx$ on parillinen funktio. Tuloksena on välillä $]0,\pi[$ puhdas sinisarja funktiolle f:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Kyseessä on parittoman jatkon f_o tavallinen Fourier'n sarja.

Vastaavat tulokset voidaan luonnollisesti johtaa myös välillä $]0,p[$ määritellylle funktiolle jatkamalla se parillisesti tai parittomasti $2p$-jaksoiseksi funktioksi.