1. DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

1.3. Normaaliryhmä

Olkoon tarkasteltavana kertalukua n oleva differentiaaliyhtälö, joka on ratkaistu korkeimman kertaluvun derivaatan suhteen:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Tuntemattomana on tällöin reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio $y(x)$; tarkastelu voi rajoittua jollekin reaaliakselin välille I, jolloin siis kyseessä on funktio $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Toisinaan on tarkoituksenmukaista muuntaa tämä yhtälö ensimmäisen kertaluvun yhtälöksi, jolloin kertaluvun alenemisen hintana on yhtälön muuttuminen yhtälöryhmäksi: tuntematon funktio onkin vektoriarvoinen funktio.

Menettely on seuraava: Merkitään funktiota y ja sen derivaattoja kertalukuun $n-1$ saakka seuraavasti:

$$\begin{cases} y_0 = y, \\ y_1 = y', \\ y_2 = y'', \\ \quad\vdots \\ y_{n-2} = y^{(n-2)}, \\ y_{n-1} = y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Tällöin on

$$\begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \quad\vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1}, \\ y_{n-1}' = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \end{cases}$$

missä viimeinen yhtälö on itse asiassa alkuperäinen differentiaaliyhtälö. Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä, jossa on n yhtälöä ja n tuntematonta funktiota $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$. Tätä kutsutaan alkuperäistä differentiaaliyhtälöä vastaavaksi *normaaliryhmäksi*.

Normaaliryhmä voidaan kirjoittaa vektorimuotoon merkitsemällä

$$\underset{n\times 1}{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

ja määrittelemällä vektoriarvoinen funktio $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$F(x, (\, y_0 \quad y_1 \quad \dots \quad y_{n-2} \quad y_{n-1}\,)^{\mathrm{T}}) = (\, y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_{n-1} \quad f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})\,)^{\mathrm{T}}.$$

Ryhmä voidaan tällöin kirjoittaa lyhyesti

$$Y' = F(x, Y)$$

ja se on siis muodoltaan samanlainen kuin tavallinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Erona on, että funktio F onkin vektoriarvoinen.

Esimerkki 1.3.1. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0,$$

missä μ on vakio, kutsutaan *van der Polin yhtälöksi.*

Tätä vastaava normaaliryhmä saadaan merkitsemällä $y_0 = y$, $y_1 = y'$, jolloin

$$\begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = \mu(1 - y_0^2)y_1 - y_0, \end{cases}$$

ja vastaava vektoriarvoinen funktio on siis $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu(1 - y_0^2)y_1 - y_0 \end{pmatrix}, \quad \text{missä } Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esimerkki 1.3.2. Edellistä vastaavalla tavalla voidaan myös vektoridifferentiaaliyhtälöt saattaa ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi. Newtonin lain mukaan planeettaliike (suurimassaisen ja siis kiinteäksi ajatellun) Auringon ympäri määräytyy differentiaaliyhtälöstä

$$\mathbf{r}'' = -\alpha \frac{\mathbf{r}^0}{r^2},$$

missä vakio α riippuu Auringon massasta ja gravitaatiovakiosta. Jos pidetään tunnettuna, että kyseessä on tasoliike, voidaan paikkavektori kirjoittaa muotoon $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ja sen pituus muotoon $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Komponenttimuotoinen yhtälö on tällöin

$$x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} = -\alpha \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{eli}$$

$$\begin{cases} x'' = -\alpha \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ y'' = -\alpha \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Kyseessä on siten kahden toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön muodostama ryhmä.

Tämä voidaan palauttaa ensimäisen kertaluvun ryhmäksi ottamalla käyttöön uudet muuttujat $x' = u$ ja $y' = v$; kyseessä ovat planeetan nopeuskomponentit. Näillä merkinnöillä ryhmä saa muodon

$$\begin{cases} x' = u, \\ y' = v, \\ u' = -\alpha \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ v' = -\alpha \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Kyseessä on siis neljän yhtälön muodostama ensimmäisen kertaluvun ryhmä.

Ryhmä voidaan kirjoittaa vektorimuotoon $Y' = F(t, Y)$, missä

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad F(t,Y) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\alpha x/(x^2+y^2)^{3/2} \\ -\alpha y/(x^2+y^2)^{3/2} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Funktio F ei jälkimmäisessä esimerkissä riipu aikamuuttujasta t; riippumaton muttuja ei siis ole eksplisiittisesti mukana differentiaaliyhtälön oikeassa puolessa, vaan ainoastaan tuntemattomien funktioiden argumenttina. Tällaista differentiaaliyhtälöä kutsutaan *autonomiseksi*.

Esitetyllä differentiaaliyhtälöiden muuntamisella ensimmäisen kertaluvun ryhmiksi on merkityksensä mm. numeerisessa laskennassa. Yhtälöiden numeerisen ratkaisun algoritmit esitetään nimittäin yleensä yhtälöä $y' = f(x, y)$ koskevina; tässä kuitenkin y voi olla vektori ja f vektoriarvoinen funktio.

Matlabista löytyy valmiit ohjelmat em. muotoa olevan differentiaaliyhtälön numeeriseen ratkaisemiseen (`ode23` ja `ode45`); näissäkin y ja f voivat olla vektoreita. Käyttäjän tehtäväksi jää ohjelmoida differentiaaliyhtälönsä funktio f m-tiedostoon. Esimerkkinä voi katsoa tiedostoa `vdpol.m`, missä on ohjelmoituna van der Polin yhtälön funktio f.

5. DIFFERENTIAALIYHTÄLÖRYHMÄT

5.2. Lineaarisen vakiokertoimisen ryhmän matriisimuoto

Olkoon tarkasteltavana lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}x_2(t) + \cdots + \alpha_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = \alpha_{21}x_1(t) + \alpha_{22}x_2(t) + \cdots + \alpha_{2n}x_n(t) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = \alpha_{n1}x_1(t) + \alpha_{n2}x_2(t) + \cdots + \alpha_{nn}x_n(t) \end{cases}.$$

Yhtälöitä on siis n kappaletta, samoin tuntemattomia funktioita $x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$.

Kun merkitään

$$\underset{n\times 1}{x(t)} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

voidaan ryhmä kirjoittaa matriisimuotoon

$$x'(t) = Ax(t).$$

Oletetaan, että matriisin A kaikki ominaisarvot ovat eri suuria. Tällöin matriisi on diagonalisoituva, ts. on olemassa ominaisarvojen muodostama lävistäjämatriisi Λ ja ominaisvektoreiden muodostama similariteettimuunnosmatriisi T siten, että $T^{-1}AT = \Lambda$.

Tällaisessa tapauksessa yhtälöryhmä voidaan ratkaista seuraavassa esitettävällä tavalla. Itse asiassa menettely on yleistettävissä myös tapaukseen, missä ominaisarvot eivät ole eri suuria, mutta tätä ei tässä käsitellä.

Sijoittamalla matriisimuotoiseen yhtälöön $A = T\Lambda T^{-1}$ saadaan

$$x'(t) = T\Lambda T^{-1}x(t) \quad \text{eli} \quad T^{-1}x'(t) = \Lambda T^{-1}x(t).$$

Merkitään $y(t) = T^{-1}x(t)$. Tällöin $y'(t) = T^{-1}x'(t)$, koska matriisin T alkiot ja siis myös käänteismatriisin T^{-1} alkiot ovat vakioita. Matriisimuotoinen yhtälö saa nyt muodon

$$y'(t) = \Lambda y(t) \quad \text{eli} \quad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Tämä vastaa yhtälöryhmää

$$y_k'(t) = \lambda_k y_k(t), \qquad k = 1, \dots, n,$$

missä siis jokaiselle komponenttifunktiolle y_k on oma differentiaaliyhtälönsä. Nämä ovat helpot ratkaista:

$$y_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Kun vektori $y(t)$ tunnetaan, saadaan alkuperäisten tuntemattomien funktioiden muodostama vektori $x(t)$ helposti: $x(t) = Ty(t)$. Funktiot $x_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, saadaan siten muodossa

$$x_k(t) = \tau_{k1}C_1e^{\lambda_1 t} + \tau_{k2}C_2e^{\lambda_2 t} + \dots + \tau_{kn}C_ne^{\lambda_n t},$$

missä luvut τ_{kj} ovat matriisin T alkioita. Tämä on todellakin yhtälöryhmän yleinen ratkaisu, koska ominaisarvot λ_k ovat eri suuria ja funktiot $e^{\lambda_k t}$ siten lineaarisesti riippumattomia.

Esimerkki 5.2.1. Tarkastellaan kahden yhtälön ja kahden tuntemattoman funktion $x_1(t)$, $x_2(t)$ yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Tällöin on

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ja ominaisarvot ja -vektorit laskemalla saadaan

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lineaarisesti riippumattomat perusratkaisut ovat

$$y_1(t) = C_1e^{3t}, \qquad y_2(t) = C_2e^{2t}$$

ja alkuperäiset tuntemattomat funktiot

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1e^{3t} + C_2e^{2t} \\ C_1e^{3t} + C_2e^{2t} \end{pmatrix}$$

eli

$$x_1(t) = 2C_1e^{3t} + C_2e^{2t}, \qquad x_2(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t}. \quad \blacksquare$$

Menettelyn edut tulevat esiin yhtälöryhmän koon ollessa suuri. Ominaisarvojen ja -vektoreiden laskemiseen voidaan tällöin käyttää varsin pitkälle hiottuja tietokonealgoritmeja.

5.3. Autonomiset ryhmät

Kertalukua n oleva differentiaaliyhtälöryhmä olkoon kirjoitettu muotoon

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \quad\vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Erityisesti tämä voi olla kertalukua n olevan differentiaaliyhtälön normaaliryhmä.

Ryhmää kutsutaan *autonomiseksi*, jos oikean puolen funktiot f_k eivät (eksplisiittisesti) riipu muuttujasta t. (Ryhmän oikeapuoli luonnollisesti aina riippuu muuttujasta t sikäli, että funktioissa y_k on t muuttujana; autonomisessa tapauksessa ei muunlaista riippuvuutta ole.)

Toisen kertaluvun autonominen ryhmä on siten muotoa

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1' = f_1(y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_2' = f_2(y_1, y_2). \end{cases}$$

Puolittain jakamalla tämä saadaan muotoon

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_2(y_1, y_2)}{f_1(y_1, y_2)}.$$

Tässä on oletettu, että derivaatan merkkinä käytetyllä differentiaaliosamäärällä voidaan laskea kuten millä tahansa osamäärällä; kyseessä on derivoinnin ketjusäännön seuraus.

Saadun yhtälön oikea puoli voidaan laskea jokaisessa y_1y_2-tason pisteessä, missä funktiot f_1 ja f_2 ovat määriteltyjä. Yhtälön vasemman puolen mukaan se esittää differentiaaliosamäärää dy_2/dy_1, ts. antaa tähän pisteeseen liittyvän suunnan. Tällöin y_1y_2-tasoon voidaan muodostaa suuntakenttä.

Suuntakenttä kuvaa differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisukäyrää $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ y_1y_2-tasossa; muuttuja t on käyräparametri. Pisteen (a, b) kautta kulkeva ratkaisukäyrä toteuttaa alkuehdon $y_1(t_0) = a$, $y_2(t_0) = b$; tässä alkuehtokohdalla t_0 ei autonomisuuden takia ole merkitystä. Ratkaisukäyrän esittämistä tässä muodossa kutsutaan *faasitasoesitykseksi* ja y_1y_2-tasoa *faasitasoksi.*

Vaikka yhtälöryhmä ei olisikaan autonominen, voidaan luonnollisesti piirtää tietyn alkuehdon täyttävä ratkaisukäyrä $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$. Suuntakenttää ei faasitasoon tällöin saada, koska differentiaaliosamäärä dy_2/dy_1 riippuu myös muuttujasta t, ts. suuntakenttä on jokaisella muuttujan t arvolla erilainen.

Vastaavalla tavalla voidaan korkeampien kertalukujen ($n > 2$) ryhmien tapauksessa muodostaa graafisia esityksiä asettamalla jotkin kaksi ratkaisufunktiota koordinaattiakseleille. Vaikka ryhmä olisi autonominenkin, ei tällöin saada yleensä suuntakenttää, koska differentiaaliosamäärä dy_j/dy_k riippuu myös muista komponenttifunktioista y_i, $i \neq j, k$. Jos ryhmä on autonominen, voidaan kyllä muodostaa vastaavalla tavalla n-ulotteinen faasiavaruus suuntakenttineen.

6. DIFFERENSSIYHTÄLÖT

6.1. Differenssiyhtälön käsite

Differentiaaliyhtälö kuvaa sovellutuksissa usein jonkin ilmiön tai systeemin kehittymistä ajan mukana. Kun alkuehto on annettu, so. systeemin tila tarkastelun alkuhetkellä on kiinnitetty, on yhtälön ratkaisu yleensä yksikäsitteinen, ts. systeemin kehitys on täysin määrätty. Esimerkiksi harmonista värähtelijää kuvaa yhtälö

$$x''(t) = -kx(t) \qquad (k > 0).$$

Alkutila tulee määrätyksi, kun annetaan systeemin poikkeama alkuhetkellä $x(0)$ ja alkunopeus $x'(0)$. Tämän jälkeen ratkaisu on yksikäsitteisesti määrätty jokaisella myöhemmällä (ja aikaisemmalla) ajan hetkellä t.

Tällöin kyseessä on ns. *jatkuva systeemi*, jonka tila $x(t)$ riippuu jatkuvasta reaalimuuttujasta t.

Jatkuvien systeemien ohella voidaan tarkastella *diskreettejä systeemejä*, joiden tilat muuttuvat hyppäyksittäin. Esimerkkinä voisi olla vaikkapa (pienehkön) eläinpopulaation kehitys, jolloin on mielekästä tarkastella eri sukupolvien yksilömääriä: p_1 on ensimmäisen sukupolven koko, p_2 toisen jne. Seuraavan sukupolven koko riippuu jollakin tavoin edellisestä sukupolvesta, esimerkiksi $p_{n+1} = p_n + rp_n(N - p_n)$, missä r ja N ovat positiivisia vakioita. Termi $rp_n(N - p_n)$ voi olla negatiivinenkin, mikä kuvaa liian suureksi kasvaneen populaation sisäistä kitkaa. Tällaista yhtälöä kutustaan *differenssiyhtälöksi*. Samoin kuin differentiaaliyhtälö kuvaa jatkuvaa systeemiä, kuvaa diskreettiä systeemiä differenssiyhtälö.

Matemaattiselta kannalta differenssiyhtälö on yhtälö, joka sitoo toisiinsa lukujonon peräkkäisiä tai lähekkäisiä termejä. Kun siihen liitetään alkuehto, tulee lukujono yksikäsitteisesti määrätyksi.

Ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälö alkuehtoineen on muotoa

$$a_{k+1} = f(k, a_k), \qquad a_0 \text{ annettu},$$

missä f on tunnettu funktio. *Toisen kertaluvun* differenssiyhtälö sitoo toisiinsa kolme peräkkäistä lukujonon termiä; alkuehtoineen tämä on seuraavaa tyyppiä:

$$a_{k+2} = f(k, a_k, a_{k+1}), \qquad a_0,\ a_1 \text{ annettuja}.$$

Yleisesti kertalukua n oleva differenssiyhtälö sitoo toisiinsa $n + 1$ peräkkäistä jonon termiä:

$$a_{k+n} = f(k, a_k, \ldots, a_{k+n-1}).$$

Alkuehtona on annettava jonon n ensimmäistä termiä: $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}$.

Differenssiyhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan yleisen termin a_k esittämistä indeksin k funktiona. Vaikka ratkaisua ei tunnettaisikaan, voidaan jonon lukuja kuitenkin muodostaa rekursiivisesti: alkuehto antaa ensimmäisen tai ensimmäiset luvut ja varsinaisesta yhtälöstä voidaan lukuja laskea askel askeleelta lisää.

Esimerkki 6.1.1. Yhtälö

$$a_{k+1} = 3a_k$$

on ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälö. Sen ratkaisu on ilmeisestikin

$$a_k = C\,3^k,$$

missä C on mielivaltainen vakio. Jos alkuehdoksi annetaan $a_0 = 5$, tulee olla $C = 5$ ja ratkaisu on siis $a_k = 5 \cdot 3^k$. ■

Esimerkki 6.1.2. Ehdot

$$a_{k+1} = (k+1)a_k, \quad a_0 = 1$$

muodostavat ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälön alkuehtoineen. Ratkaisujonon lukuja voidaan muodostaa rekursiivisesti:

$$a_1 = (0+1)a_0 = 1, \quad a_2 = (1+1)a_1 = 2, \quad a_3 = (2+1)a_2 = 6, \quad a_4 = (3+1)a_3 = 24, \quad \text{etc.}$$

Ilmeisestikin on $a_k = k!$. ■

Esimerkki 6.1.3. *Fibonacci'n luvut* määritellään siten, että seuraava on kahden edellisen summa:

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k.$$

Tämä on toisen kertaluvun differenssiyhtälö. Kaksi ensimmäistä lukua, a_0 ja a_1, voidaan ilmeisesti valita miten tahansa ja yhtälön avulla voidaan näistä lähtien aina muodostaa lukujono. Fibonacci'n lukujen tapauksessa valitaan yleensä $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, jolloin jonon alkupääksi saadaan

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots.$$

Yleistä ratkaisua, so. lukua a_k indeksin k funktiona ei tämän avulla kuitenkaan ole niinkään helppoa arvata. ■

Differenssiyhtälöt ovat analogisia differentiaaliyhtälöihin sikäli, että kumpiakin käytetään ajan mukana kehittyvien systeemien — diskreettien tai jatkuvien — kuvaamiseen. Ne ovat analogisia myös sikäli, että differenssiyhtälöitä voidaan ratkaista monissa tapauksissa hyvin samantyyppisellä tekniikalla kuin differentiaaliyhtälöitä. Seuraavassa rajoitutaan lineaarisiin vakiokertoimisiin differenssiyhtälöihin.

6.2. Lineaariset differenssiyhtälöt

Ensimmäisen ja toisen kertaluvun lineaariset ja homogeeniset differenssiyhtälöt ovat muotoa

$$a_{k+1} + f(k)a_k = 0, \qquad a_{k+2} + f(k)a_{k+1} + g(k)a_k = 0,$$

missä $f(k)$ ja $g(k)$ ovat indeksin k funktioita.

Yhtälön lineaarisuus merkitsee, että jos a_k ja b_k ovat yhtälön ratkaisuja, niin myös $u_k = a_k + b_k$ ja $v_k = \lambda a_k$ ovat ratkaisuja. Esimerkiksi toisen kertaluvun yhtälön tapauksessa tämä nähdään seuraavasti:

$$\begin{aligned}
u_{k+2} + f(k)u_{k+1} + g(k)u_k &= (a_{k+2} + b_{k+2}) + f(k)(a_{k+1} + b_{k+1}) + g(k)(a_k + b_k) \\
&= (a_{k+2} + f(k)a_{k+1} + g(k)a_k) + (b_{k+2} + f(k)b_{k+1} + g(k)b_k) = 0; \\
v_{k+2} + f(k)v_{k+1} + g(k)v_k &= \lambda a_{k+2} + f(k)\lambda a_{k+1} + g(k)\lambda a_k = \lambda(a_{k+2} + f(k)a_{k+1} + g(k)a_k) = 0.
\end{aligned}$$

Lineaarisen homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu on ensimmäisen kertaluvun yhtälön tapauksessa muotoa $C\,a_k$, missä C on määräämätön vakio ja lukujono $\langle a_k \rangle$ jokin yhtälön ratkaisu, joka ei ole identtisesti (so. kaikilla indekseillä) $= 0$. Toisen kertaluvun tapauksessa ratkaisu on muotoa $C_1 a_k + C_2 b_k$, missä C_1 ja C_2 ovat määräämättömiä vakioita ja lukujonot $\langle a_k \rangle$, $\langle b_k \rangle$ lineaarisesti riippumattomia yhtälön ratkaisuja. Tilanne on siten hyvin samankaltainen lineaaristen differentiaaliyhtälöiden kanssa.

Lineaarisessa vakiokertoimisessa homogeenisessa differenssiyhtälössä funktiot $f(k)$ ja $g(k)$ ovat vakioita. Yhtälö voidaan ratkaista yritteellä $a_k = z^k$, missä z pyritään määräämään sopivasti. Seuraavat esimerkit osoittavat tärkeimmät tapaukset.

Esimerkki 6.2.1. Pyritään ratkaisemaan Fibonacci'n lukujen differenssiyhtälö

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$

yritteellä $a_k = z^k$. Tällöin tulee olla

$$z^{k+2} = z^{k+1} + z^k,$$

mikä voidaan supistaa tekijällä z^k. Tuloksena on toisen asteen yhtälö $z^2 - z - 1 = 0$, jolla on juuret $z_{12} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Yleinen ratkaisu on siten

$$a_k = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k .$$

Alkuehdoista $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ seuraa vakioille arvot $C_1 = -C_2 = 1/\sqrt{5}$. Fibonacci'n luvut saadaan siis lausekkeesta

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Lauseke antaa kokonaislukuja huolimatta sen sisältämistä neliöjuurista. ■

Esimerkki 6.2.2. Ratkaistaessa differenssiyhtälöä

$$a_{k+2} - 4a_{k+1} + 4a_k = 0$$

samalla yritteellä kuin edellä päädytään toisen asteen yhtälöön $z^2 - 4z + 4 = 0$. Tällä on kaksinkertainen juuri $z_{12} = 2$ eikä lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja siis saada kuin yksi, $a_k = 2^k$.

Analogia differentiaaliyhtälöihin antaisi aiheen arvella ratkaisuksi myös $a_k = k\,2^k$, mikä voidaan sijoittamalla tarkistaa:

$$(k+2)\,2^{k+2} - 4(k+1)\,2^{k+1} + 4k\,2^k = 2^k[4(k+2) - 8(k+1) + 4k] = 0.$$

Kyseessä siis todella on ratkaisu ja yleinen ratkaisu on ilmeisestikin

$$a_k = C_1\, 2^k + C_2\, k\, 2^k. \quad ■$$

7. DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN APPROKSIMATIIVISET RATKAISUT

7.1. Numeerinen ratkaiseminen

Olkoon tarkasteltavana alkuarvoprobleema

$$y' = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0.$$

Tämän numeerinen ratkaiseminen tarkoittaa, että t-akselille muodostetaan hilapisteet

$$t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

missä h on askelpituus (yleensä suhteellisen pieni), ja funktion y arvoille pyritään laskemaan hilapisteissä approksimaatiot $y_k \approx y(t_k)$. Tarkastellaan ratkaisua välillä $[a, b]$, missä $a = t_0$; tällöin on luontevaa valita $h = (b - a)/n$ jollakin luonnollisella luvulla n.

Ratkaisufunktion $y(t)$ Taylorin kehitelmä pisteessä t_k muuttujana t_{k+1} on

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(t_k) + \dots.$$

Jos tämä katkaistaan ensimmäisen asteen termin jälkeen saadaan

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + hy'(t_k) = y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)).$$

Jos ratkaisun approksimaatio $y_k \approx y(t_k)$ tunnetaan, on siis luontevaa laskea seuraava approksimaatio $y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ kaavalla

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Täten saatu *Eulerin menetelmä* on mahdollisimman yksinkertainen numeerinen menetelmä alkuarvoprobleeman ratkaisemiseen: aloittamalla indeksistä $k = 0$ ja soveltamalla kaavaa toistuvasti arvoilla $k = 1, 2, \dots$, saadaan lasketuiksi approksimaatiot $y_0, y_1, y_2, \dots$.

Kaava voidaan johtaa toisinkin: Integroimalla differentiaaliyhtälön $y'(t) = f(t, y(t))$ kumpikin puoli välin $[t_k, t_{k+1}]$ yli saadaan

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\, dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt.$$

Karkea approksimaatio oikeanpuoleiselle integraalille on $hf(t_k, y(t_k))$, mikä johtaa samaan kaavaan kuin edellä.

Eulerin menetelmän konvergenssia, kun $h \to 0$, voidaan analysoida seuraavasti:

Vähennetään iteraatiokaava

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

ja Taylorin polynomista jäännöstermeineen saatu yhtälö

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

puolittain:

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} = y(t_k) - y_k + h[f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi).$$

Oletetaan, että funktion y toinen derivaatta on tarkastelualueessa rajoitettu, ts.

$$|y''| = |f_t(t,y) + f_y(t,y)f(t,y)| \leq M,$$

ja että funktio f täyttää ns. *Lipschitzin ehdon*

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y-z|.$$

Tässä M ja L ovat vakioita. Kun lisäksi approksimaatiovirhettä merkitään $\epsilon_k = |y(t_k) - y_k|$, saadaan

$$\begin{aligned}\epsilon_{k+1} &\leq \epsilon_k + h|f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi)| \\ &\leq \epsilon_k + hL\epsilon_k + \frac{h^2}{2}M = (1+hL)\epsilon_k + \frac{h^2}{2}M.\end{aligned}$$

Erityisesti on $\epsilon_0 = 0$. Merkitsemällä lyhyyden vuoksi $p = 1 + hL$ ja $q = h^2M/2$ saadaan muille luvuille ϵ_k arviot

$$\begin{aligned}&\epsilon_1 \leq q, \\ &\epsilon_2 \leq p\epsilon_1 + q \leq (p+1)q, \\ &\epsilon_3 \leq p\epsilon_2 + q \leq (p^2+p+1)q, \\ &\quad \ldots \\ &\epsilon_k \leq (p^{k-1} + \cdots + p + 1)q = q\frac{p^k - 1}{p-1}.\end{aligned}$$

On siis

$$\epsilon_k \leq \frac{h^2M}{2}\,\frac{(1+hL)^k - 1}{1+hL-1} = \frac{hM}{2L}\,[(1+hL)^k - 1] \leq \frac{hM}{2L}\,[e^{khL} - 1],$$

missä on käytetty epäyhtälöä $1+x \leq e^x$. Koska jokaisessa välin $[a,b]$ hilapisteessä t_k on $kh \leq b-a$, saadaan jokaiselle approksimaatiovirheelle arvio

$$\epsilon_k \leq \frac{hM}{2L}\,[e^{(b-a)L} - 1].$$

Tästä seuraa menetelmän konvergenssi: jos $h \to 0$, niin myös $\epsilon_k \to 0$ kaikilla k.

Edellä sanottu ei merkitse, että aina tulisi pyrkiä käyttämään mahdollisimman lyhyitä askelpituuksia h. Jos nimittäin askelpituutta lyhennetään, joudutaan tietyn approksimaation — esimerkiksi arvon $y(b)$ approksimaation — laskemiseen ottamaan useampia askelia. Tämä merkitsee useampia laskutoimituksia ja suurempaa riskiä tietokoneessa tapahtuvien pyöristysvirheiden kumuloitumiseen. Edellä oleva konvergenssitarkastelu onkin sikäli puutteellinen, että pyöristysvirheiden kumuloitumista ei ole lainkaan otettu huomioon.

Sopiva askelpituus h riippuu funktion f luonteesta. On kehitetty ns. *adaptiivisia* algoritmeja, joissa pyritään laskennan kestäessä arvioimaan kullakin alueella optimaalinen askelpituus ja käyttämään tätä.

Eulerin menetelmää parempaan algoritmiin päästään johtamalla integraalille

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,dt$$

parempi approksimaatio. Numeerisen integroinnin puolisuunnikassääntö antaa approksimaatioksi

$$\frac{h}{2}\,[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))].$$

Tätä ei kuitenkaan sellaisenaan voida laskea, koska oikea puoli sisältää funktion y arvon pisteessä t_{k+1}. Jos tälle ensin johdetaan karkea approksimaatio Eulerin menetelmän mukaisesti, päädytään *parannettuun Eulerin menetelmään*, jossa approksimaatio y_{k+1} lasketaan approksimaation y_k avulla kahdessa vaiheessa:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}).$$

Ideaa voidaan kehittää edelleen. Varsin paljon käytetty on *Rungen – Kuttan menetelmä*, jossa yhden askelen laskenta tapahtuu useassa vaiheessa:

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(t_k,\ y_k),\\
K_2 &= f(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{hK_1}{2}),\\
K_3 &= f(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{hK_2}{2}),\\
K_4 &= f(t_k + h,\ y_k + hK_3),\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).
\end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa lasketaan eräänlainen painotettu keskiarvo funktion f arvoista tarkastelualueessa. On ilmeistä, että menetelmän tarkempi analyysi edellyttää syvempää paneutumista numeerisen analyysin teoriaan.

Todettakoon lopuksi, että edellä olevat tarkastelut voidaan suorittaa aivan samoin, mikäli kyseessä on yhden differentiaaliyhtälön $y' = f(t, y)$ sijasta korkeamman kertaluvun yhtälöä vastaava vektorimuotoinen normaaliryhmä $Y' = f(t, Y)$. Korkeampien kertalukujen alkuarvoprobleemoiden numeerinen ratkaiseminen tapahtuu siten soveltamalla eo. menetlmiä vastaavaan normaaliryhmään.

7.2. Sarjaratkaisut

Esimerkki 7.2.1. Differentiaaliyhtälö

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

voidaan ratkaista käyttämällä origokeskistä potenssisarjayritettä

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Derivoimalla saadaan

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{ja} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

ja sijoittamalla nämä yhtälöön

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Jotta myös ensimmäisessä summassa saataisiin muuttujan x eksponentiksi summeerausindeksi, vaihdetaan indeksointia sijoittamalla $j = k - 2$; muissa summissa vaihdetaan vain summeerausindeksin nimeä:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}x^j - \sum_{j=1}^{\infty} 2ja_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0.$$

Siirtämällä kaikki termit yhtäläisyysmerkin samalle puolelle ja yhdistämällä termit saadaan

$$2a_2 + a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}[(j+2)(j+1)a_{j+2} - (2j-1)a_j]x^j = 0.$$

Koska lauseke on $= 0$ kaikilla x, tulee jokaisen potenssin x^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, kertoimen olla $= 0$:

$$\begin{aligned} &2a_2 + a_0 = 0, \\ &(j+2)(j+1)a_{j+2} - (2j-1)a_j, \quad j = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Näistä saadaan rekursiokaavat

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2}\, a_0, \\ a_{j+2} &= \frac{2j-1}{(j+2)(j+1)}\, a_j, \quad j = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Ilmeisestikin kerroin a_0 voidaan valita vapaasti, samoin a_1. Kertoimet, joiden indeksit ovat parillisia, saadaan lausutuiksi kertoimen a_0 avulla:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2}\, a_0, \\ a_4 &= \frac{2\cdot 2-1}{(2+2)(2+1)}\, a_2 = -\frac{1}{8}\, a_0, \\ a_6 &= \frac{2\cdot 4-1}{(4+2)(4+1)}\, a_4 = -\frac{7}{240}\, a_0, \\ a_8 &= \frac{2\cdot 6-1}{(6+2)(6+1)}\, a_6 = -\frac{11}{1920}\, a_0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Paritonindeksiset kertoimet ovat vastaavasti

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2\cdot 1-1}{(1+2)(1+1)}\, a_1 = \frac{1}{6}\, a_1, \\ a_5 &= \frac{2\cdot 3-1}{(3+2)(3+1)}\, a_3 = \frac{1}{24}\, a_1, \\ a_7 &= \frac{2\cdot 5-1}{(5+2)(5+1)}\, a_5 = \frac{1}{112}\, a_1, \\ a_9 &= \frac{2\cdot 7-1}{(7+2)(7+1)}\, a_7 = \frac{13}{8064}\, a_1, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ratkaisu voidaan siten kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} y(x) = a_0 &\left(1 - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{8}\,x^4 - \frac{7}{240}\,x^6 - \frac{11}{1920}\,x^8 - \ldots\right) \\ &+ a_1\left(x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^5 + \frac{1}{112}\,x^7 + \frac{13}{8064}\,x^9 + \ldots\right). \end{aligned}$$

Määräämättömiksi jääneet kertoimet a_0 ja a_1 ovat ilmeisestikin integroimisvakiot. Sulkulausekkeissa olevat sarjat — mikäli ne suppenevat — määrittävät yhtälön kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. Tällä edellytyksellä on siis saatu differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu. ■