Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2 / kevät 1996

TIETOKONEHARJOITUKSET 2 (viikot 7 – 8)

Harjoitusten ratkaisemiseen käytetään Mathematicaa. Käynnistys tapahtuu komennoilla

```
use mathematica
fep math
```

Yksityiskohtaisia ohjeita tiedostossa `/p/edu/matpk/t/tietokoneharjoitus.2`.

Tehtävä 1 : a) Käyttäjä voi määritellä Mathematicassa uusia funktioita esimerkiksi seuraavasti:

```
f[x_] := x^3 - 7 x^2 + 5.
```

Tämän jälkeen funktiota voidaan käyttää kuten mitä tahansa standardifunktiota. Syötä eo. määrittely ja kokeile `f[2]`, `f[a+b]`, `f'[x]`, `f''[7]`.
b) Funktion määrittelyn pätevyysaluetta voidaan rajoittaa asettamalla määrittelyrivin loppuun rajoitusehto, esimerkiksi `/; x >= 1`. Samalle funktiolle voidaan kirjoittaa useita määrittelysyötteitä. Määrittele tällä tavoin funktio

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x \le 1, \\ e^{1-x}, & \text{jos } x > 1, \end{cases}$$

ja piirrä sen kuvaaja.
c) Funktiot voidaan määritellä myös funktion `Function` avulla. Kokeile: `p = Function[x, x^3]`, `q = Function[x, x > 3]`. Laske `q[2]`, `q[3.1]`.

Tehtävä 2 : Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + y = x^2$ yleinen ratkaisu käyttäen Mathematican funktiota `DSolve`. Anna komento sekä muodossa `DSolve[y''[x] + y[x] == x^2, y[x], x]` että muodossa `DSolve[y''[x] + y[x] == x^2, y, x]`. Miten tulokset eroavat? Sijoita kummassakin tapauksessa ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön ja tarkista, että se toteutuu. Millainen ero tapausten välillä on?

Tehtävä 3 : Ratkaise seuraavat alku- tai reuna-arvoprobleemat Mathematican funktiolla `DSolve`:

a) $y'' - 4y' + 5y = \sin x, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = -1,$ b) $y'' - 5y' + 6y = e^x, \quad y(0) = y(1) = 0.$

Tehtävä 4 : Olkoot $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ tuntemattomat funktiot. Etsi differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - 2x \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

yleinen ratkaisu. Määritä alkuehtoa $x(0) = 1, \ y(0) = 2, \ z(0) = 3$ vastaava yksityisratkaisu.

Tehtävä 5 : Etsi Mathematicalla *Airyn differentiaaliyhtälön* $y'' + xy = 0$ yleinen ratkaisu. Etsi yksityisratkaisut, kun alkuehtona on a) $y(0) = 0, \ y'(0) = 1$, b) $y(0) = 1, \ y'(0) = 0$. Piirrä ratkaisujen kuvaajat samaan kuvioon. Miten ratkaisufunktioiden nollakohdat näyttävät suhtautuvan toisiinsa?

Tehtävä 6 : Alkuarvoprobleeman $y' = x^2 - y^2, \ y(0) = -\frac{1}{2}$ ratkaisua ei voida lausua alkeisfunktioiden avulla. a) Kokeile, onnistuuko ratkaisu Mathematican funktiolla `DSolve`. b) Ratkaise probleema numeerisesti välillä $x \in [0, 5]$ käyttämällä Mathematican funktiota `NDSolve` ja piirrä ratkaisun kuvaaja.