Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

**Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2** / kevät 1996

**TIETOKONEHARJOITUKSET 1** (viikot 5, 6)

Harjoituksissa tarkastellaan differentiaaliyhtälöiden ratkaisukäyriä Matlabin päälle TKK:ssa rakennetun demonstraatiopaketin **DiffEqLab** avulla. Käynnistämisohjeet ym. ovat löydettävissä tiedostosta `/p/edu/matpk/t/tietokoneharjoitus.1`. Käytössä on IsoLatin-merkistö.

**Tehtävä 1 :** Piirrä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä $y' = \dfrac{t+y}{t-y}$ (tuntemattomana funktiona $y(t)$) vastaava suuntakenttä ja tähän useita ratkaisukäyriä. Differentiaaliyhtälö on valmiiksi ohjelmoituna **DiffEqLab**-pakettiin kuuluvassa tiedostossa `equ2.m`. Miksi käyrät mahtavat piirtyä siten kuin piirtyvät?

**Tehtävä 2 :** Kuten edellinen tehtävä, mutta differentiaaliyhtälö $y' = \cos(x+y)$. Ohjelmoi yhtälö itse Matlabin funktioksi m-tiedostoon Emacsia käyttäen ja talleta se kotihakemistoosi. Ota mallia ensimmäisen tehtävän yhtälön ohjelmoinnista; koodin voit tulostaa Matlabin sisällä komennolla `type equ2`. Tutki yhtälön ratkaisukäyriä. Voivatko nämä olla suoria? Jos, niin mitkä ovat niiden yhtälöt?

**Tehtävä 3 :** Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y'' - (1-y^2)y' + y = 0$ (*van der Polin yhtälö*) on valmiiksi ohjelmoituna **DiffEqLab**-paketin tiedostossa `vdp.m`. Tutki ohjelmakoodia ja mieti, miksi se on sen näköinen kuin on. Onko yhtälö autonominen?

**Tehtävä 4 :** Tutki van der Polin yhtälön ratkaisujen kuvaajia sekä aikariippuvuuden mukaan (ts. $y(t)$ ja $y'(t)$ ajan $t$ funktioina) että faasitasossa (jossa toisella akselilla on $y$ ja toisella $y'$ ajan $t$ ollessa käyräparametrin asemassa). Millainen alkuehto tarvitaan yksikäsitteiselle ratkaisulle? Miten tämä voidaan antaa toisaalta aikariippuvuuskuviossa, toisaalta faasitasossa? Eräs faasitason umpinainen käyrä on ratkaisukäyrien *attraktori*, ts. käyrä, jota ratkaisut lähestyvät. Millainen tämä on?

**Tehtävä 5 :** Ohjelmoi *Airyn differentiaaliyhtälö* $y'' + xy = 0$ Matlabin m-tiedostoksi. Käytä mallina van der Polin yhtälöä. Tutki Airyn yhtälön ratkaisuja. Onko yhtälö autonominen? Miten tämän voi päätellä faasitasokuvasta? Miten yhtälön kahden eri ratkaisun nollakohdat suhtautuvat toisiinsa?

**Tehtävä 6 :** Kappaleen (planeetan) liikettä keskeisvoimakentässä hallitsee Newtonin lakien mukainen differentiaaliyhtälö $\mathbf{r}'' = -a\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$, missä pilkut tarkoittavat derivaattoja ajan suhteen, $\mathbf{r}$ on paikkavektori, $r = |\mathbf{r}|$ tämän pituus ja $a$ vakio. Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä on tasoliike, jolloin siis $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$. Vastaava normaaliryhmä on

$$x' = u, \quad y' = v, \quad u' = -ax/(x^2+y^2)^{3/2}, \quad v' = -ay/(x^2+y^2)^{3/2},$$

missä $u$ ja $v$ ovat nopeuden komponentit. Ryhmä on valmiiksi ohjelmoituna **DiffEqLab**-paketin tiedostossa `planet.m` (missä on asetettu $a = 1$). Tutki koodia ja piirrä ratkaisukäyriä, joiden pitäisi teorian mukaisesti olla ellipsejä, paraabeleja ja hyperbelejä. Saatko kaikki tapaukset esiin?

---

Kiinnostuneet voivat kopioida **DiffEqLab**-paketin itselleenkin anonyymi-ftp -menettelyllä koneesta `dopey.hut.fi`, tiedosto `pub/kivela/DiffEqLab.zip`. Jotta pakettia voisi käyttää, tulee itsellä olla Matlab 4.x jossakin koneessa (Unix/X-Windows, PC-Windows; periaatteessa myös Mac, jota tosin ei ole kokeiltu). Kiinnostuksen laajuuden selvittämiseksi pyydetään lähettämään lyhyt sähköpostiviesti (käyttäjä, konetyyppi, mahdolliset ongelmat) osoitteeseen `Simo.Kivela@hut.fi`, kun paketti on onnistuneesti asennettu.

Pakettia ei ole kovin tarkoin testattu. Tiedossa on virhetoimintoja tapauksessa, missä differentiaaliyhtälön $y' = f(t,y)$ funktio f ei ole määritelty koko ty-tasossa. Oleellisista virheistä voi raportoida sähköisesti yllä olevaan osoitteeseen.