Demonstraatiotehtävä 78 viikolla 9 lienee osoittautunut hieman vaikeaksi. Koska kyseessä on todistustehtävä — jollaisiin pitäisi vähitellen oppia — julkaistaan ratkaisu ohessa. Välikoetehtävänä tämä olisi merkittävän vaikea ja sellaisena epätodennäköinen; yksinkertaisemmat todistustehtävät ovat kyllä välikokeissakin mahdollisia.

Tehtävä 78: Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio. Määritellään funktio $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}, & \text{kun } x \neq y, \\ f'(x), & \text{kun } x = y. \end{cases}$$

Osoita, että g on differentioituva pisteessä (a,a), jos $f''(a)$ on olemassa.

Lähtökohdista:

Differentioituvuuden osoittaminen jakautuu usein kolmeen vaiheeseen: 1) määritetään osittaisderivaatat kyseisessä pisteessä; 2) muodostetaan näitä hyväksi käyttäen differentiaalikehitelmän ϵ -funktio; 3) osoitetaan, että tämän raja-arvo on $= 0$, mikä merkitsee differentioituvuutta.

Tässä tehtävässä tarvittavia työkaluja ovat a) l'Hospitalin sääntö, b) ns. yleistetty väliarvolause yhden muuttujan funktioille.

Jälkimmäisen mukaan välillä $[a,b]$ jatkuville ja derivoituville funktioille f ja g pätee

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

missä $\xi \in\ ]a,b[$. Edellytyksenä on, että $g'(x) \neq 0$ välillä $]a,b[$.

Tulos ei seuraa aivan suoraan tavallisesta väliarvolauseesta $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ erikseen osoittajaan ja nimittäjään sovellettuna, koska tällöin saataisiin funktioille f ja g mahdollisesti eri ξ !

Ratkaisu:

1) Funktion g osittaisderivaatat pisteessä (a,a) saadaan erotusosamäärien raja-arvoina:

$$\begin{aligned} g_x(a,a) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h,a) - g(a,a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} = \tfrac{1}{2} f''(a). \end{aligned}$$

Toiseksi viimeisen yhtäläisyysmerkin kohdalla on käytetty l'Hospitalin sääntöä, viimeinen yhtäläisyysmerkki perustuu toisen derivaatan määrittelyyn erotusosamäärän raja-arvona.

Vastaavasti saadaan $g_y(a,a) = \frac{1}{2}f''(a)$.

2) Differentiaalikehitelmän ϵ -funktio joudutaan laskemaan lisäysvektorille (h,k) erikseen tapauksissa $h \neq k$ ja $h = k$.

Jos $h \neq k$, differentiaalikehitelmästä

$$g(a+h, a+k) - g(a,a) = g_x(a,a)h + g_y(a,a)k + \sqrt{h^2+k^2}\,\epsilon(a,h,k)$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\epsilon(a,h,k) &= \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[g(a+h,a+k) - g(a,a) - g_x(a,a)h - g_y(a,a)k\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[\frac{f(a+h)-f(a+k)}{h-k} - f'(a) - \frac{1}{2}(h+k)f''(a)\right] \\
&= \frac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[\frac{[f(a+h)-hf'(a)] - [f(a+k)-kf'(a)]}{h^2-k^2} - \frac{1}{2}f''(a)\right].
\end{aligned}$$

Kun merkitään $u(t) = f(a+t) - tf'(a)$, $v(t) = t^2$, voidaan yleistetyn väliarvolauseen avulla kirjoittaa

$$\frac{[f(a+h)-hf'(a)] - [f(a+k)-kf'(a)]}{h^2-k^2} = \frac{u(h)-u(k)}{v(h)-v(k)} = \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)} = \frac{f'(a+\xi)-f'(a)}{2\xi},$$

missä ξ on lukujen h ja k välissä. Tällöin

$$\epsilon(a,h,k) = \frac{h+k}{2\sqrt{h^2+k^2}}\left[\frac{f'(a+\xi)-f'(a)}{\xi} - f''(a)\right].$$

Jos $h = k$, on vastaavasti

$$\begin{aligned}
\epsilon(a,h,h) &= \frac{1}{\sqrt{h^2+h^2}}\left[g(a+h,a+h) - g(a,a) - g_x(a,a)h - g_y(a,a)h\right] \\
&= \frac{1}{|h|\sqrt{2}}\left[f'(a+h) - f'(a) - hf''(a)\right] = \frac{h}{|h|\sqrt{2}}\left[\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} - f''(a)\right].
\end{aligned}$$

3) Koska tekijät $\dfrac{h+k}{2\sqrt{h^2+k^2}}$ ja $\dfrac{h}{|h|\sqrt{2}}$ ovat rajoitettuja, ts. on olemassa vakio M, jota pienempiä näiden itseisarvot ovat, saadaan ϵ -funktiolle on kaikissa tapauksissa arvio

$$|\epsilon(a,h,k)| \leq M \max_{|t|\leq \max\{|h|,|k|\}}\left|\frac{f'(a+t)-f'(a)}{t} - f''(a)\right|.$$

Koska

$$\lim_{t\to 0}\frac{f'(a+t)-f'(a)}{t} = f''(a),$$

saadaan epäyhtälön oikea puoli mielivaltaisen pieneksi valitsemalla $|h|$ ja $|k|$ riittävän pieniksi; tästä seuraa $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\epsilon(a,h,k) = 0$. $\square$

SKK