Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T II
Välikoe 3, 9.5.1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1 : Laske pinta-ala elliptiselle paraboloidille $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$.

Tehtävä 2 : Osoita vektorikenttä

$$\mathbf{u}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

pyörteettömäksi. Onko kenttä konservatiivinen? Onko sillä potentiaalifunktiota määrittelyjoukossaan? Määritä potentiaalifunktio myönteisessä tapauksessa; perustele kielteisessä tapauksessa, miksi sitä ei ole.

Tehtävä 3 : Määrittele täsmällisesti, mitä tarkoitetaan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenemisella. Todista, että jos sarja suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Päteekö käänteinen: jos raja-arvo on $= 0$, niin suppeneeko sarja?

Tehtävä 4 : Funktio f määritellään potenssisarjalla:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \text{missä } a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = 0,\ a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+2)(k+3)}.$$

Millä muuttujan x arvoilla sarja suppenee, ts. millä muuttujan arvoilla funktio tulee määritellyksi? Osoita, että funktio toteuttaa Airyn differentiaaliyhtälön $y'' - xy = 0$.

Tekniska högskolan — Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 GRUNDKURS I MATEMATIK T II
Mellanförhör 3, 9.5.1995

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, mellanförhörets nummer, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Uppgift 1 : Beräkna arean hos den elliptiska paraboloiden $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 2$.

Uppgift 2 : Visa, att vektorfältet

$$\mathbf{u}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

är virvelfritt. Är fältet konservativt? Har den en potentialfunktion i sin definitionsmängd? Om så är fallet, bestäm potentialfunktionen; i motsatt fall motivera, varför potentialfunktionen saknas.

Uppgift 3 : Definiera noggrant, vad som menas med att en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar. Visa, att om serien konvergerar, så är $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Gäller motsatsen: om gränsvärdet är $= 0$, konvergerar då serien?

Uppgift 4 : Funktionen f definieras med potensserien:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \text{där } a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = 0,\ a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+2)(k+3)}.$$

För vilka värden på x konvergerar serien, dvs. för vilka variabelvärden kommer funktionen att vara definierad? Visa, att funktionen satisfierar Airys differentialekvation $y'' - xy = 0$.