Mat-1.202 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T II
Välikoe 2, 28.3.1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1 : Olkoon funktio F differentioituva ja olkoon $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Selosta, millä ehdolla yhtälö $F(x, y, z) = 0$ määrittelee funktion $z = g(x, y)$ pisteen (x_0, y_0, z_0) ympäristössä. Lausu funktion g osittaisderivaatat g_x, g_y, g_{xy} funktion F osittaisderivaattojen avulla. Tarkastele sovellutuksena yhtälöä $1 + xz + yz^2 + z^3 = 0$ pisteen $(2, 2, -1)$ ympäristössä. Laske erityisesti $g_x(2, 2)$, $g_y(2, 2)$, $g_{xy}(2, 2)$.

Tehtävä 2 : Puolipallon muotoiseen homogeeniseen kappaleeseen koverretaan samakeskisen puolipallon muotoinen kolo. Kolon säde valitaan siten, että syntyvän kappaleen massakeskipiste on kolon pinnalla. Määritä kolon säde suhteessa puolipallon säteeseen. Vastaus tarvittaessa kaksidesimaalisena likiarvona.

Tehtävä 3 : Tarkastellaan alkuarvoprobleemaa:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 2z(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 2z(t), \\ z'(t) = -2x(t) + 2y(t) + z(t); \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$$

Tee jompikumpi seuraavista tehtävistä: a) Selosta, miten probleeman voi ratkaista Mathematicalla ominaisarvoteoriaa käyttäen. (Oleellista on selittää, miten lasku Mathematicalla etenee, ei käskyjen syntaksin yksityiskohtia.) b) Ratkaise tehtävä jollakin menetelmällä.

Tehtävä 4 : Differentiaaliyhtälö $my'' + ky = F_0 \sin(\omega t)$ esittää harmonista pakotettua värähtelijää. Tässä $y(t)$ on värähtelevän kappaleen poikkeama tasapainoasemasta; m (kappaleen massa), k, F_0 ja ω ovat vakioita. Termi $F_0 \sin(\omega t)$ esittää kappaleeseen vaikuttavaa ulkoista voimaa. Millä vakioita sitovalla ehdolla systeemi räjähtää? Millainen on differentiaaliyhtälön ratkaisu tällöin?

Mat-1.202 GRUNDKURS I MATEMATIK T II
Mellanförhör 2, 28.3.1995

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, mellanförhörets nummer, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Uppgift 1 : Låt funktionen F vara differentierbar och låt $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Förklara under vilka omständigheter ekvationen $F(x, y, z) = 0$ definierar en funktion $z = g(x, y)$ i en omgivning av punkten (x_0, y_0, z_0). Ge funktionens g partiella derivator g_x, g_y, g_{xy} med hjälp av funktionens F partiella derivator. Undersök som en tillämpning ekvationen $1 + xz + yz^2 + z^3 = 0$ i en omgivning av punkten $(2, 2, -1)$. Beräkna speciellt $g_x(2, 2)$, $g_y(2, 2)$, $g_{xy}(2, 2)$.

Uppgift 2 : I en homogen halvklotsformad kropp gör man en halvklotsformad urgröpning så att de två kloten har samma mittpunkt. Urgröpningens radie väljes så att den nya kroppens tyngdpunkt ligger på urgröpningens yta. Bestäm förhållandet mellan urgröpningens radie och det ursprungliga halvklotets radie. Svaret kan vid behov ges som ett närmevärde med två decimaler.

Uppgift 3 : Vi undersöker begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 2z(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 2z(t), \\ z'(t) = -2x(t) + 2y(t) + z(t); \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$$

Utför endera av följande uppgifter: a) Förklara hur problemet kan lösas med hjälp av egenvärdesteori med Mathematica. (Det viktiga är att förklara hur räkningarna genomförs med Mathematica, inte detaljerna i syntaxen av kommandona.) b) Lös problemet med hjälp av någon metod.

Uppgift 4 : Differentialekvationen $my'' + ky = F_0 \sin(\omega t)$ beskriver en harmonisk oscillator med en yttre påtvingad kraft. Funktionen $y(t)$ ger oscillatorns avvikelse från viloläget; m (kroppens massa), k, F_0 och ω är konstanter. Termen $F_0 \sin(\omega t)$ anger den yttre kraften, som verkar på kroppen. Under vilka villkor på konstanterna kommer systemet att explodera? Hurudan är differentialekvationens lösning i så fall?