Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T II
Välikoe 1, 28.2.1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1 : Kahden reaalimuuttujan funktio $f(x,y)$ toteuttaa alueessa $\{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ osittaisdiferentiaaliyhtälön

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Olkoon $u = xy$ ja $v = x^2 - y^2$; merkitään $f(x,y) = F(u,v) = F(xy,\ x^2 - y^2)$. Millaisen osittaisdifferentiaaliyhtälön toteuttaa funktio $F(u,v)$? Ratkaise tämä yhtälö ja määritä sen perusteella $f(x,y)$, kun tiedetään lisäksi, että $f(x,x) = x$ arvoilla $x > 0$.

Tehtävä 2 : Selosta, miten voidaan tarkistaa, onko annettu avaruuden $\mathbb{R}^3$ piste differentioituvan funktion f paikallinen ääriarvokohta. Miten ääriarvon tyyppi voidaan selvittää? Tutki sovellutuksena, onko piste $(2,0,1)$ funktion

$$f(x,y,z) = yz - zx - xy + x + y + 2z - 2$$

ääriarvokohta ja myönteisessä tapauksessa, onko kyseessä maksimi vai minimi.

Tehtävä 3 : Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = |xy|$, kun alkuehtona on a) $y(-1) = 1$, b) $y(-1) = 0$, c) $y(-1) = -1$.

Tehtävä 4 : Toisen kertaluvun lineaarisen ja homogeenisen differentiaaliyhtälön $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ kerroinfunktiot $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat jatkuvia. Todista, että yhtälön ratkaisuista y_1 ja y_2 muodostettu Wronskin determinantti $W(x)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $W' + P(x)W = 0$. Päättele tämän perusteella, että joko $W(x) = 0$ kaikilla x tai $W(x) \neq 0$ kaikilla x.

Tekniska högskolan Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 GRUNDKURS I MATEMATIK T II
Mellanförhör 1, 28.2.1995

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, mellanförhörets nummer, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Uppgift 1 : Funktionen $f(x, y)$ av två reella variabler satisfierar i området $\{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ den partiella differentialekvationen

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Låt $u = xy$ och $v = x^2 - y^2$; sätt $f(x, y) = F(u, v) = F(xy,\ x^2 - y^2)$. Hurudan partiell differentialekvation kommer funktionen $F(u, v)$ att satisfiera? Lös denna ekvation och bestäm med hjälp av detta $f(x, y)$, om man dessutom vet, att $f(x, x) = x$ för $x > 0$.

Uppgift 2 : Förklara hur man kan undersöka, huruvida en given punkt i rummet $\mathbb{R}^3$ är en lokal extrempunkt till en differentierbar funktion f. Hur kan man bestämma extrempunktens typ? Som en tillämpning undersök, huruvida punkten $(2, 0, 1)$ är en extrempunkt till funktionen

$$f(x, y, z) = yz - zx - xy + x + y + 2z - 2$$

och om så är fallet, huruvida det är ett maximum eller minimum.

Uppgift 3 : Lös differentialekvationen $y' = |xy|$ under begynnelsevillkoret a) $y(-1) = 1$, b) $y(-1) = 0$, c) $y(-1) = -1$.

Uppgift 4 : Den linjärä homogena differentialekvationen $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ av andra ordningen har kontinuerliga koefficientfunktioner $P(x)$ och $Q(x)$. Visa att Wronskis determinant $W(x)$, som ekvationens lösningar y_1 och y_2 bildar, satisfierar differentialekvationen $W' + P(x)W = 0$. Visa utgående från detta, att antingen är $W(x) = 0$ för alla x eller så är $W(x) \neq 0$ för alla x.