Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T II
Tentti, 14.8.1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Pinnalle $x^6 + y^4 + z^2 = 25$ asetetaan tangenttitaso, joka kulkee pisteiden $(2, 2, 2)$ ja $(3, 1, 5)$ kautta. Muodosta yhtälöt, joista tangenttitason ja pinnan sivuamispiste (a, b, c) voidaan ratkaista. Selosta, miten ratkaiseminen voidaan tehdä esimerkiksi Mathematicaa käyttäen, kun tiedetään, että piste sijaitsee lähellä pistettä $(1, 2, 3)$.

Tehtävä 2 : Olkoon

$$g(u, v) = \int_c y\,dx + 2x\,dy,$$

missä c on jana, jonka alkupiste on $(0, 0)$ ja loppupiste (u, v). Määritä funktion g suurin arvo ympyrällä $u^2 + v^2 = 1$.

Tehtävä 3 : Esitä Stokesin lause. Laske tämän avulla viivaintegraali $\int_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$, missä c on pinnanpalan $z = xy$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, reuna ja $\mathbf{u}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$.

Tehtävä 4 : Etsi differentiaaliyhtälön $y'''' - 3y''' + 4y'' - 2y' = 1$ yleinen ratkaisu ja alkuehdon $y(0) = 1$, $y'(0) = -1/2$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$ toteuttava yksityisratkaisu.

Tehtävä 5 : Ratkaise alkuarvoprobleema $y' = xy$, $y(0) = 1$ potenssisarjayritteellä $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Laske sarjan viisi ensimmäistä nollasta eroavaa termiä. Mikä on sarjan suppenemissäde?

Tehtävä 6 : Funktion f jaksona on 2π ja välillä $[-\pi, \pi]$ on $f(x) = \cos(x/2)$. Laske funktion trigonometrinen Fourier'n sarja. (Laskutavasta riippuen seuraava voi olla hyödyksi: Kaavoista

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

saadaan yhteenlaskulla

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]. \quad)$$

Tekniska högskolan Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 GRUNDKURS I MATEMATIK T II
Tentamen, 14.8.1995

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Tentamen räcker fyra timmar.

Uppgift 1 : Till ytan $x^6 + y^4 + z^2 = 25$ lägger man ett tangentplan, som går genom punkterna $(2,2,2)$ och $(3,1,5)$. Bilda de ekvationer från vilka man kan lösa tangentplanets och ytans tangeringspunkt (a,b,c). Förklara hur ekvationerna kan lösas till exempel med Mathematica, när man vet att punkten ligger nära punkten $(1,2,3)$.

Uppgift 2 : Antag att

$$g(u,v) = \int_c y\,dx + 2x\,dy,$$

där c är en sträcka med begynnelsepunkten $(0,0)$ och endpunkten (u,v). Bestäm funktionens g största värde på cirkeln $u^2 + v^2 = 1$.

Uppgift 3 : Formulera Stokes' sats. Beräkna med dess hjälp kurvintegralen $\int_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$, där c är ytans $z = xy$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, rand och $\mathbf{u}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$.

Uppgift 4 : Finn differentialekvationens $y'''' - 3y''' + 4y'' - 2y' = 1$ allmänna lösning och den partikulärlösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$, $y'(0) = -1/2$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.

Uppgift 5 : Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = xy$, $y(0) = 1$ med en potensserieansats $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Beräkna seriens fem första termer som inte är $= 0$. Vilken är seriens konvergensradie?

Uppgift 6 : Funktionen f har perioden 2π och på intervallet $[-\pi, \pi]$ är $f(x) = \cos(x/2)$. Beräkna funktionens trigonometriska Fourier serie. (Beroende på räknemetoden kan det följande vara till nytta: Av formlerna

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

erhålls genom addition

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]. \quad)$$