Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T II
Tentti, 24.5.1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on muotoa $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), g_3(x))$. Lausu $F'(x)$ funktioiden f, g_1, g_2, g_3 derivaattojen avulla. Laske sovellutuksena $F'(2)$ a) esittämäsi kaavan avulla, b) muodostamalla ensin eksplisiittinen lauseke funktiolle $F(x)$, kun $f(x, y, z) = xyz$, $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = x^3$, $g_3(x) = x^4$.

Tehtävä 2 : Massiivisen pallon säde on R ja massatiheys suoraan verrannollinen keskipisteestä mitattuun etäisyyteen. Laske pallon hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Esitä tulos muodossa $J = amR^2$, missä m on pallon kokonaismassa, ts. määritä kerroin a.

Tehtävä 3 : Määrittele gradientti, divergenssi ja roottori sekä selosta, mitä skalaari- tai vektorikentän ominaisuuksia ne kuvaavat ja millä tavoin. Esitä esimerkki pyörteisestä, mutta lähteettömästä vektorikentästä, ja samoin lähteisestä, mutta pyörteettömästä.

Tehtävä 4 : Ratkaise differentiaaliyhtälö $e^y y' = x + e^y - 1$ sijoituksella $u = x + e^y$. Millaisessa joukossa ratkaisu on määritelty? Perustelut.

Tehtävä 5 : Tarkastellaan alkuarvoprobleemaa

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 2z(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 2z(t), \\ z'(t) = -2x(t) + 2y(t) + z(t); \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$$

Selosta, miten probleeman voi ratkaista Mathematicalla ominaisarvoteoriaa käyttäen. (Oleellista on selittää, miten lasku Mathematicalla etenee, ei käskyjen syntaksin yksityiskohtia. Alkuarvoprobleemaa ei siis tarvitse ratkaista.)

Tehtävä 6 : Funktio f määritellään välillä $]-1, 1]$ asettamalla $f(x) = x$; funktio on jaksollinen jaksona 2. Laske funktion Fourier'n sarjan kertoimet sekä eksponenttimuotoa että trigonometrista muotoa varten. Suppeneeko sarja tasaisesti?

Tekniska högskolan Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 GRUNDKURS I MATEMATIK T II
Tentamen, 24.5.1995

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Tentamen räcker fyra timmar.

Uppgift 1 : Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är på formen $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), g_3(x))$. Ge $F'(x)$ med hjälp av funktionernas f, g_1, g_2, g_3 derivator. Beräkna som en tillämpning $F'(2)$ a) med hjälp av din formel, b) genom att först bilda ett explicit uttryck för funktionen $F(x)$, då $f(x, y, z) = xyz$, $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = x^3$, $g_3(x) = x^4$.

Uppgift 2 : Ett massivt klot har radien R och tätheten proportionell mot avståndet från mittpunkten. Beräkna klotets tröghetsmoment kring en axel genom mittpunkten. Ge resultatet på formen $J = amR^2$, där m är klotets massa, dvs. bestäm faktorn a.

Uppgift 3 : Definiera gradienten, divergensen och rotationen samt förklara, vilka egenskaper hos ett skalär- eller vektorfält dessa beskriver och hur. Ge exempel på ett källfritt vektorfält med virvlar och och ett virvelfritt vektorfält med källor.

Uppgift 4 : Lös differentialekvationen $e^y y' = x + e^y - 1$ med hjälp av substitutionen $u = x + e^y$. I en hurudan mängd är lösningen definierad? Motivera.

Uppgift 5 : Vi undersöker begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 2z(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 2z(t), \\ z'(t) = -2x(t) + 2y(t) + z(t); \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$$

Förklara hur problemet kan lösas med hjälp av egenvärdesteori med Mathematica. (Det viktiga är att förklara, hur räkningarna genomförs med Mathematica, inte detaljerna i syntaxen av kommandona. Begynnelsevärdesproblemet behöver alltså inte lösas.)

Uppgift 6 : Funktionen f definieras i intervallet $]-1, 1]$ genom att sätta $f(x) = x$; funktionen är periodisk med perioden 2. Beräkna funktionens Fourier-series koefficienter för såväl exponentialform som trigonometrisk form. Konvergerar serien likformigt?