Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T II
Tentti, 12.1.1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Tutki, mitä arvoja funktio

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

saa origon δ-säteisessä ympäristössä. Määritä funktion raja-arvo origossa, mikäli tämä on olemassa.

Tehtävä 2 : Tavaroita siirrellään xy-tasossa käyttäen robottia, joka muodostuu kahdesta toisiinsa liitetystä vipuvarresta. Ensimmäinen varsi on toisesta päästään kiinnitetty origoon ja se voi kiertyä origon ympäri; kiertokulma on α. Varren pituus on 3 metriä. Toisen varren pää on kiinnitetty ensimmäisen vapaaseen päähän, jonka ympäri se voi xy-tasossa kiertyä. Varren pituus on 1 metri ja sen suuntakulma ensimmäiseen varteen nähden on β. Robotin tartuntaelin on toisen varren vapaassa päässä. Lausu tartuntaelimen koordinaatit (x, y) ohjausparametrien α ja β funktioina, ts. määritä lauseke vektorimuuttujan vektoriarvoiselle funktiolle $(x, y) = f(\alpha, \beta)$. Laske funktion Jacobi'n determinantti ja tutki, milloin se on $= 0$. Mitä xy-tason pisteitä nollakohdat vastaavat? Mikä ominaisuus vektorimuuttujan funktiolla ja siis robotilla on näissä pisteissä?

Tehtävä 3 : Selosta, miten lasketaan kaarevan pinnan ala. Laske satulapinnasta leikatun pinnanpalan $z = xy$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, pinta-ala.

Tehtävä 4 : Differentiaaliyhtälöllä

$$y' + P(x)y = (x+1)^2 e^x$$

on ratkaisuna $y = (x^2 - 1)e^x$. Määritä $P(x)$ ja yhtälön yleinen ratkaisu. Etsi alkuehdon $y(0) = 5$ toteuttava yksityisratkaisu.

Tehtävä 5 : Selosta jokin tapa etsiä sarjaratkaisu alkuarvoprobleemalle $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. (Sarjaratkaisu on etsittävä suoraan, so. käyttämättä tietoa, että yhtälön ratkaisu on $y = \tan x$.) Laske sarjaratkaisun termit neljännen asteen termiin saakka (tämä mukaanluettuna).

Tehtävä 6 : Laske sarjojen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k}$$

summat summeeraamalla ensin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2^k}.$$

Millä muuttujan x reaaliarvoilla sarjat suppenevat?