

# **Tilastolliset menetelmät**

**Ilkka Mellin**

**Teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laboratorio**

## Esipuhe

Tämä moniste antaa perustiedot **tilastollisista menetelmistä** ja niiden soveltamisesta.

Moniste perustuu Teknillisessä korkeakoulussa pitämiini *sovelletun todennäköisyyslaskennan* ja *tilastollisen analyysin perusteiden* kurssien luentoihin sekä osittain myös *ennustamisen ja aikasarja-analyysin* ja *koesuunnittelun ja tilastollisten mallien* kurssien luentoihin, mikä tietysti lyö leimansa monisteessa käsiteltävään materiaaliin.

Moniste jakautuu viiteen osaan: Osa 1 muodostaa *johdannon* monisteen pääosalle, jossa käsitellään *otoksia, otosjakaumia, estimointia, testausta* sekä *regressio-* ja *varianssianalyysia*. Osassa 1 esitellään lyhyesti kirjoittajan näkemykset siitä, *mitä tilastotiede on tieteenalana* sekä käsitellään *tilastollisen aineiston keräämistä ja mittaamista* sekä *tilastollisten aineistojen kuvaamista*. Osassa 2 tarkastellaan *satunnaisotoksia* sekä *otosjakaumia* ja tilastollisten mallien parametrien *estimointia*. Osa 3 on omistettu *tilastollisille testeille*. Monisteen kaksi viimeistä osaa, osat 4 ja 5, käsittelevät *kaksiulotteisten tilastollisten aineistojen kuvaamista, korrelaatiota* sekä *regressio-* ja *varianssianalyysia*.

Se, että käsillä oleva teos on perusopetuksen moniste näkyy siinä, että teoksessa ei käytetä mittateoreettista lähestymistapaa. Lisäksi kaikkein vaativimmat matemaattiset tulokset on jätetty perustelematta. Monisteessa perustellaan kuitenkin useimpien tilastotieteen kurssien tarpeiden kannalta varmasti aivan riittävä osa sellaista tuloksista, joissa ei tarvita riippuvien havaintojen tai multinormaalijakauman ja sen neliömuotojen jakaumien teoriaa.

Tavoitteenani on ollut ja on tuottaa verkkojakeleluun sellaista todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen oppimateriaalia, mikä mahdollistaa itseopiskelun. Lukijasta saattaa tuntua, että monisteessa on tähän tavoitteeseen nähden kovin vähän esimerkkejä – monisteessa ei ole esimerkkejä kuin aivan keskeisimpien teorian kohtien havainnollistamiseksi. Perusteluna tälle ratkaisulle on se, että monisteen materiaalia täydentävät ja rikastavat verkossa julkaistut harjoitustehtäväkokoelmat ratkaisuosineen. Tilastotieteen opettajien kannattaa huomata myös se, että käsillä olevaan materiaaliin liittyvät luentokalvot ovat saatavilla verkossa.

Käsillä olevaan monisteeseen liittyy kiinteästi opetusmoniste **Todennäköisyyslaskenta** sekä kaava- ja taulukkokokoelmat **Todennäköisyyslaskenta: Kaavat, Tilastolliset menetelmät: Kaavat** sekä **Tilastolliset taulukot**, jotka kaikki ovat myös saatavilla verkossa.

Kesällä 2006

Ilkka Mellin

# Tilastolliset menetelmät

## Tilastolliset menetelmät: Johdanto

1. Tilastotiede tieteenalana
2. Tilastollisten aineistojen kerääminen ja mittaaminen
3. Tilastollisten aineistojen kuvaaminen

## Otokset, otosjakaumat ja estimointi

4. Otokset ja otosjakaumat
5. Estimointi
6. Estimointimenetelmät
7. Väliestimointi

## Tilastolliset testit

8. Tilastollinen testaus
9. Testejä suhteasteikollisille muuttujille
10. Testejä järjestysasteikollisille muuttujille
11. Testejä laatueroasteikollisille muuttujille
12. Yhteensopivuuden, homogeenisuuden ja riippumattomuuden testaaminen

## Lineaarinen regressioanalyysi

13. Tilastollinen riippuvuus ja korrelaatio
14. Johdatus regressioanalyysiin
15. Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli
16. Yleinen lineaarinen malli
17. Regressiomallin valinta
18. Regressiodiagnostiikka
19. Erityiskysymyksiä yleisen lineaarisen mallin soveltamisessa

## Varianssianalyysi

20. Yksisuuntainen varianssianalyysi
21. Kaksisuuntainen varianssianalyysi
22. Kolmi- ja useampisuuntainen varianssianalyysi

## Sisällys

<b>Tilastolliset menetelmät: Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>1. TILASTOTIEDE TIETEENALANA</b>	<b>5</b>
1.1. MITÄ TILASTOTIEDE ON?	6
MITÄ TILASTOTIEDE EI OLE?	6
MITÄ TILASTOTIEDE ON?	6
SATUNNAISILMIÖT JA TODENNÄKÖISYyslASKENTA	6
TILASTOLLISEN TUTKIMUSAINeISTON KERÄÄMINEN SATUNNAISILMIÖNÄ	7
TEOREETTINEN JA SOVELTAVA TILASTOTIEDE	8
KUVAILEVA TILASTOTIEDE JA TILASTOLLINEN PÄÄTTELY	8
TILASTOTIETEEN OSA-ALUEITA	8
TILASTOTIETEEN REUNA-ALUEITA	9
1.2. TILASTOTIETEEN SOVELLUSKOhteET	9
TILASTOTIETEELLÄ ON MONTA NIMEÄ	10
TILASTOTIEDE JA TILASTOT	10
TILASTOTIEDE, TILASTOT JA YHTEISKUNTA	11
ESIMERKKEJÄ TILASTOLLISISTA TUTKIMUSASETelmISTA	11
<b>2. TILASTOLLISet AINEISTOT, NIIDEN KERÄÄMINEN JA MITTAAMINEN</b>	<b>15</b>
2.1. TILASTOLLISet AINEISTOT JA NIIDEN TODENNÄKÖISYysMALLIT	16
TILASTOLLISet AINEISTOT	16
TILASTOLLISet TUTKIMUSASETelmAT	16
TILASTOLLISet MALLIT	16
TILASTOLLISten AINEISTOJEN KERÄÄMINEN	16
2.2. TILASTOLLISet KOKEET	17
KOEASETelmAT	17
KONTROLLOIDUT KOKEET	17
KONTROLLOIDUT KOKEET: KOMMENTTEJA	18
SATUNNAISTAMINEN	18
2.3. SUORAT HAVAINNOT	19
SUORAT HAVAINNOT: KOMMENTTEJA	19
2.4. KOKONAISTUTKIMUS	19
2.5. OTANTATUTKIMUS	19
OTANTAMENETelmiÄ	20
YKSINKERTAINEN SATUNNAISOTANTA	20
SYSTEMAATTINEN OTANTA	20
OSITETTU OTANTA	21
RYVÄSOTANTA	21
MONIASTEINEN OTANTA	21
2.6. SATUNNAISTAMISEN MERKITYS TILASTOLLISten AINEISTOJEN KERÄÄMISessä	21
2.7. MITTAAMINEN, MITTA-ASTEIKOT JA TILASTOLLISet MUUTTUJAT	22
MITTARIN VALIDITEETTI JA TARKKUUS	22
MITTA-ASTEIKOT	22
KVALITATIIVISet JA KVANTITATIIVISet MUUTTUJAT	23
DISKREETIT JA JATKUVAT MUUTTUJAT	23
TILASTOLLISten MUUTTUJIEen MITTA-ASTEIKOT JA TILASTOLLISet MENETelmÄT	23
<b>3. TILASTOLLISten AINEISTOJEN KUVAAMINEN</b>	<b>24</b>
3.1. TILASTOLLISet AINEISTOT	25

<b>3.2. HAVAINTOARVOJEN JAKAUMA</b>	<b>25</b>
FREKVENSIT JA FREKVENSIIEN JAKAUMA	26
PYLVÄSDIAGRAMMI	26
PYLVÄSDIAGRAMMIN PIIRTÄMINEN	26
LUOKKAFREKVENSIT JA LUOKKAFREKVENSIIEN JAKAUMA	27
HISTOGRAMMI	28
HISTOGRAMMIN PIIRTÄMINEN	28
MITTA-ASTEIKOT JA HAVAINTOARVOJEN JAKAUMAN KUVAAMINEN	29
<b>3.3. TUNNUSLUVUT</b>	<b>30</b>
TUNNUSLUVUT JA MITTA-ASTEIKOT	30
<b>3.4. SUHDEASTEIKOLLISTEN MUUTTUJEN TUNNUSLUVUT</b>	<b>31</b>
ARITMEETTINEN KESKIARVO	31
LUOKITELLUN AINEISTON ARITMEETTINEN KESKIARVO	32
ARITMEETTINEN KESKIARVO HAVAINTOARVOJEN JAKAUMAN KUVAAJANA	32
VARIANSSI	33
ARITMEETTISEN KESKIARVON JA VARIANSSI LASKEMINEN	34
KESKIHAJONTA	35
VARIANSSI JA KESKIHAJONTA HAVAINTOARVOJEN JAKAUMAN KUVAAJANA	36
STANDARDINTI	36
TILASTOLLINEN ETÄISYYS	36
ORIGOMOMENTIT	36
KESKUSMOMENTIT	37
VINOUS	37
HUIPUKKUUS	38
HARMONINEN KESKIARVO	39
GEOMETRINEN KESKIARVO	40
ARITMEETTINEN, HARMONINEN JA GEOMETRINEN KESKIARVO	41
<b>3.5. JÄRJESTYSASTEIKOLLISTEN MUUTTUJEN TUNNUSLUVUT</b>	<b>41</b>
JÄRJESTYSTUNNUSLUVUT	41
MINIMI, MAKSIMI, VAIHTELUVÄLI	41
PROSENTTIPISTEET	42
MEDIAANI	42
MEDIAANI HAVAINTOARVOJEN JAKAUMAN KUVAAJANA	43
MEDIAANI, ARITMEETTINEN KESKIARVO JA VINOUS	43
LUOKITELLUN AINEISTON MEDIAANI	44
KVARTIILIT	45
KVARTIILIT, KVARTIILIVÄLI, KVARTIILIPOIKKEAMA	45
BOX-WHISKER-KUVIO	45
<b>3.6. LAATUEROASTEIKOLLISTEN MUUTTUJEN TUNNUSLUVUT</b>	<b>47</b>
FREKVENSSI	47
MOODI	47
LUOKITELLUN AINEISTON MOODI	47
MOODI HAVAINTOARVOJEN JAKAUMAN KUVAAJANA	48
MOODI, MEDIAANI, ARITMEETTINEN KESKIARVO JA VINOUS	48

## **Otokset, otosjakaumat, estimointi** **51**

<b>4. OTOKSET JA OTOSJAKAUMAT</b>	<b>57</b>
<b>4.1. SATUNNAISOTOS</b>	<b>58</b>
TILASTOLLISET AINEISTOT	58
TILASTOLLISET MALLIT	58
SATUNNAISOTANTA	58
SATUNNAISOTOKSEN TILASTOLLINEN MALLI	59
<b>4.2. OTOSTUNNUSLUVUT JA OTOSJAKAUMAT</b>	<b>59</b>
OTOSTUNNUSLUVUT	59
OTOSJAKAUMA	60
OTOSJAKAUMAT: ESIMERKKEJÄ	60

<b>4.3.</b>	<b>ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON JA OTOSVARIANSSIN OTOSJAKAUMAT</b>	<b>60</b>
	ARITMEETTINEN KESKIJÄRVO JA OTOSVARIANSSI	60
	ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON ODOTUSARVO JA VARIANSSI	61
	ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON OTOSJAKAUMA: KÄYTTÄYTYMINEN OTOSKOON KASVAESSA	62
	ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON OTOSJAKAUMA: NORMAALIJAKAUTUNUT OTOS	62
	ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON OTOSJAKAUMA: ASYMPTOOTINEN JAKAUMA	62
	STANDARDOIDUN ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON OTOSJAKAUMA: ODOTUSARVO JA VARIANSSI	63
	STANDARDOIDUN ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON OTOSJAKAUMA: NORMAALIJAKAUTUNUT OTOS	63
	STANDARDOIDUN ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON OTOSJAKAUMA: ASYMPTOOTINEN JAKAUMA	63
	ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON OTOSJAKAUMA: KOMMENTTEJA	64
	OTOSVARIANSSIN ODOTUSARVO JA VARIANSSI	64
	OTOSVARIANSSIN OTOSJAKAUMA: NORMAALIJAKAUTUNUT OTOS	64
	OTOSVARIANSSIN OTOSJAKAUMA: KOMMENTTEJA	67
	ARITMEETTISEN KESKIJÄRVON JA OTOSVARIANSSIN RIIPPUMATTOMUUS JA OTOSJAKAUMAT: NORMAALIJAKAUTUNUT OTOS	67
<b>4.4.</b>	<b>SUHTEELLISEN FREKVENSSIN OTOSJAKAUMA</b>	<b>71</b>
	FREKVENSSI JA SUHTEELLINEN FREKVENSSI	71
	FREKVENSSIN ODOTUSARVO, VARIANSSI JA OTOSJAKAUMA	72
	SUHTEELLISEN FREKVENSSIN ODOTUSARVO JA VARIANSSI	72
	SUHTEELLISEN FREKVENSSIN OTOSJAKAUMA: KÄYTTÄYTYMINEN OTOSKOON KASVAESSA	72
	SUHTEELLISEN FREKVENSSIN OTOSJAKAUMA: ASYMPTOOTINEN JAKAUMA	73
<b>5.</b>	<b>ESTIMOINTI</b>	<b>74</b>
<b>5.1.</b>	<b>TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAN PARAMETRIT JA NIIDEN ESTIMOINTI</b>	<b>75</b>
	TILASTOLLISET AINEISTOT	75
	TILASTOLLISET MALLIT	75
	SATUNNAISOTANTA	75
	SATUNNAISOTOS	76
	ESTIMAATTORIT JA ESTIMAATIT	76
	ESTIMAATTORIN OTOSJAKAUMA	77
	ESTIMAATTOREIDEN JOHTAMINEN	77
	PISTE-ESTIMOINTI JA VÄLIESTIMOINTI	77
<b>5.2.</b>	<b>HYVÄN ESTIMAATTORIN OMINAISUUKSIA</b>	<b>77</b>
	TYHJENTÄVYYS	78
	HARHATTOMUUS	78
	ESTIMAATTORIN HARHA	78
	ESTIMAATTORIN KESKINELIÖVIRHE	78
	TEHOKKUUS	79
	TÄYSTEHOKKUUS ELI MINIMIVARIANSSISUUS	79
	TARKENTUVUUS	80
<b>6.</b>	<b>ESTIMOINTIMENETELMÄT</b>	<b>81</b>
<b>6.1.</b>	<b>ESTIMOINTI</b>	<b>82</b>
	SATUNNAISOTOS	82
	ESTIMAATTORI JA ESTIMAATTI	82
	ESTIMAATTOREIDEN JOHTAMINEN	82
<b>6.2.</b>	<b>SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN MENETELMÄ</b>	<b>82</b>
	USKOTTAVUUSFUNKTIO	82
	SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN ESTIMAATTORI	83
	SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN ESTIMAATTORIN MÄÄRÄÄMINEN	84
	LOGARITMINEN USKOTTAVUUSFUNKTIO	84

	SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN ESTIMAATTORIN ASYMPTOOTTISET OMINAISUUDET	85
<b>6.3.</b>	<b>NORMAALIJAKAUMAN PARAMETRIEN SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN ESTIMOINTI</b>	<b>85</b>
	SU-ESTIMAATTOREIDEN JOHTO	85
	SU-ESTIMAATTOREIDEN OMINAISUUDET	87
<b>6.4.</b>	<b>EKSPONENTTIJAKAUMAN PARAMETRIEN SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN ESTIMOINTI</b>	<b>87</b>
	SU-ESTIMAATTORIN JOHTO	88
<b>6.5.</b>	<b>BERNOULLI-JAKAUMAN PARAMETRIEN SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN ESTIMOINTI</b>	<b>89</b>
	SU-ESTIMAATTORIN JOHTO	89
	SU-ESTIMAATTORIN OMINAISUUDET	90
<b>6.6.</b>	<b>MOMENTTIMENETELMÄ</b>	<b>91</b>
	SATUNNAISOTOS	91
	MOMENTIT	91
	MOMENTTIESTIMAATTOREIDEN MÄÄRÄÄMINEN	92
	MOMENTTIMENETELMÄ VS SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN MENETELMÄ	92
<b>6.7.</b>	<b>NORMAALIJAKAUMAN PARAMETRIEN MOMENTTIESTIMOINTI</b>	<b>92</b>
	MM-ESTIMAATTOREIDEN JOHTO	93
<b>6.8.</b>	<b>EKSPONENTTIJAKAUMAN PARAMETRIEN MOMENTTIESTIMOINTI</b>	<b>94</b>
	MM-ESTIMAATTORIN JOHTO	94
<b>6.9.</b>	<b>BERNOULLI-JAKAUMAN PARAMETRIEN MOMENTTIESTIMOINTI</b>	<b>95</b>
	MM-ESTIMAATTORIN JOHTO	95
<b>7.</b>	<b>VÄLIESTIMOINTI</b>	<b>97</b>
<b>7.1.</b>	<b>TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAN PARAMETRIT JA NIIDEN ESTIMOINTI</b>	<b>98</b>
	SATUNNAISOTOS	98
	ESTIMAATTORI JA ESTIMAATTI	98
	ESTIMAATTOREIDEN JOHTAMINEN	98
	PISTE-ESTIMOINTI JA VÄLIESTIMOINTI	98
<b>7.2.</b>	<b>LUOTTAMUSVÄLIT</b>	<b>99</b>
	LUOTTAMUSVÄLIN MÄÄRÄÄMINEN	99
	LUOTTAMUSTASON JA -VÄLIN FREKVENSSITULKINTA	100
	JOHTOPÄÄTÖKSET LUOTTAMUSVÄLISTÄ	100
	LUOTTAMUSVÄLIT: ESIMERKKEJÄ	101
<b>7.3.</b>	<b>NORMAALIJAKAUMAN ODOTUSARVON LUOTTAMUSVÄLI, KUN JAKAUMAN VARIANSSI ON TUNNETTU</b>	<b>101</b>
	OTOS NORMAALIJAKAUMASTA	101
	NORMAALIJAKAUMAN PARAMETRIEN ESTIMOINTI	101
	ODOTUSARVON LUOTTAMUSVÄLIN KONSTRUOINTI	101
	LUOTTAMUSVÄLIN OMINAISUUDET	104
	LUOTTAMUSVÄLIN FREKVENSSITULKINTA	104
	JOHTOPÄÄTÖKSET LUOTTAMUSVÄLISTÄ	104
	VAATIMUKSET LUOTTAMUSVÄLILLE	105
	OTOSKON MÄÄRÄÄMINEN	105
<b>7.4.</b>	<b>NORMAALIJAKAUMAN ODOTUSARVON LUOTTAMUSVÄLI, KUN JAKAUMAN VARIANSSI ON TUNTEMATON</b>	<b>105</b>
	OTOS NORMAALIJAKAUMASTA	105
	NORMAALIJAKAUMAN PARAMETRIEN ESTIMOINTI	105
	ODOTUSARVON LUOTTAMUSVÄLIN KONSTRUOINTI	106
	LUOTTAMUSVÄLIN OMINAISUUDET	109
	LUOTTAMUSVÄLIN FREKVENSSITULKINTA	109
	JOHTOPÄÄTÖKSET LUOTTAMUSVÄLISTÄ	109
	VAATIMUKSET LUOTTAMUSVÄLILLE	110
	OTOSKON MÄÄRÄÄMINEN	110
	NORMAALIJAKAUMAN ODOTUSARVON LUOTTAMUSVÄLIN MÄÄRÄÄMINEN: ESIMERKKI	110

<b>7.5. NORMAALIJAKAUMAN VARIANSSIN LUOTTAMUSVÄLI</b>	<b>112</b>
OTOS NORMAALIJAKAUMASTA	112
NORMAALIJAKAUMAN PARAMETRIEN ESTIMOINTI	113
VARIANSSIN LUOTTAMUSVÄLIN KONSTRUOINTI	113
LUOTTAMUSVÄLIN OMINAISUUDET	115
LUOTTAMUSVÄLIN FREKVENSSITULKINTA	115
JOHTOPÄÄTÖKSET LUOTTAMUSVÄLISTÄ	116
VAATIMUKSET LUOTTAMUSVÄLILLE	116
<b>7.6. BERNOULLI-JAKAUMAN ODOTUSARVON LUOTTAMUSVÄLI</b>	<b>116</b>
BERNOULLI-JAKAUMA	116
OTOS BERNOULLI-JAKAUMASTA	116
BERNOULLI-JAKAUMAN ODOTUSARVOPARAMETRIN ESTIMOINTI	117
BERNOULLI-JAKAUMAN ODOTUSARVOPARAMETRIN LUOTTAMUSVÄLI	117
LUOTTAMUSVÄLIN OMINAISUUDET	120
LUOTTAMUSVÄLIN FREKVENSSITULKINTA	120
JOHTOPÄÄTÖKSET LUOTTAMUSVÄLISTÄ	120
VAATIMUKSET LUOTTAMUSVÄLILLE	121
OTOSKOON MÄÄRÄÄMINEN	121

## **Tilastolliset testit** **123**

<b>8. TILASTOLLINEN TESTAUS</b>	<b>129</b>
<b>8.1. TILASTOLLISEN TESTAUKSEN IDEA</b>	<b>130</b>
TILASTOLLISEN TESTAUKSEN LÄHTÖKOHTA	130
SATUNNAISOTOS	130
<b>8.2. TILASTOLLISET HYPOTEESIT</b>	<b>131</b>
YLEINEN HYPOTEESI	131
NOLLAHYPOTEESI	131
VAIHTOEHTOINEN HYPOTEESI	132
<b>8.3. TILASTOLLISET TESTIT JA TESTISUUREET</b>	<b>132</b>
TESTI	132
TESTISUURE	132
<b>8.4. VIRHEET TESTAUKSESSA</b>	<b>133</b>
HYLKÄYSVIRHE	133
HYVÄKSYMISVIRHE	133
TESTIN VOIMAKKUUS	133
1. JA 2. LAJIN VIRHEET	133
TESTIN TULOS JA MAAILMAN TILAT	134
TESTIN HYLKÄYS- JA HYVÄKSYMISALUEET	134
<b>8.5. MERKITSEVYYSTASO JA TESTIN HYLKÄYSALUE</b>	<b>134</b>
MERKITSEVYYSTASO	134
MERKITSEVYYSTASON FREKVENSSITULKINTA	135
TAVANOMAISET MERKITSEVYYSTASOT	135
HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN YKSIKERTAISISSA TESTAUSASETELMISSA	135
<b>8.6. TESTIN P-ARVO</b>	<b>137</b>
P-ARVO	137
P-ARVON FREKVENSSITULKINTA	137
P-ARVO JA TESTI PÄÄTÖSSÄÄNTÖNÄ	138
P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN YKSIKERTAISISSA TESTAUSASETELMISSA	138
<b>8.7. TESTIN SUORITTAMINEN</b>	<b>139</b>
TESTIN SUORITTAMINEN MERKITSEVYYSTASON VALINTAAN PERUSTUVISSA TESTAUSASETELMISSA	139
TESTIN SUORITTAMINEN P-ARVON VALINTAAN PERUSTUVISSA TESTAUSASETELMISSA	140
<b>8.8. NORMAALIJAKAUMAN PARAMETREJA KOSKEVAT TESTIT: ESIMERKKI</b>	<b>140</b>
TESTAUSASETELMA	140
HAVAINNOT	141



	TESTAUSASETELMAA KOSKEVAT HYPOTEEESIT _____	142
	$\chi^2$ -TESTI VARIANSSILLE _____	143
	t-TESTI ODOTUSARVOLLE _____	146
<b>8.9.</b>	<b>TILASTOLLISET TESTIT JA HAVAINTOJEN MITTA-ASTEIKOILLISET OMINAISUUDET _____</b>	<b>150</b>
<b>9.</b>	<b>TESTEJÄ SUHDEASTEIKOLLISILLE MUUTTUJILLE _____</b>	<b>152</b>
<b>9.1.</b>	<b>SUHDEASTEIKOLLISTEN MUUTTUJIEN TESTIT _____</b>	<b>153</b>
<b>9.2.</b>	<b>YHDEN OTOKSEN t-TESTI ODOTUSARVOLLE _____</b>	<b>154</b>
	TESTAUSASETELMA YHDEN OTOKSEN T-TESTISSÄ _____	154
	HYPOTEEESIT YHDEN OTOKSEN t-TESTISSÄ _____	154
	PARAMETRIEN ESTIMOINTI YHDEN OTOKSEN t-TESTISSÄ _____	154
	TESTISUURE JA SEN JAKAUMA YHDEN OTOKSEN t-TESTISSÄ _____	155
	HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN YHDEN OTOKSEN t-TESTISSÄ _____	156
	P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN YHDEN OTOKSEN t-TESTISSÄ _____	157
	NORMAALISUUSOLETUKSEN MERKITYS YHDEN OTOKSEN t-TESTISSÄ _____	157
	YHDEN OTOKSEN t-TESTIN HYVÄKSYMISVIRHEEN TODENNÄKÖISYYS JA VOIMAKKUUS _____	158
<b>9.3.</b>	<b>KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTI A ODOTUSARVOILLE: YLEINEN TAPAUS _____</b>	<b>160</b>
	TESTAUSASETELMA KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ A _____	160
	HYPOTEEESIT KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ A _____	161
	PARAMETRIEN ESTIMOINTI KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ A _____	161
	TESTISUURE JA SEN JAKAUMA KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ A _____	162
	HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ A _____	163
	P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ A _____	164
	NORMAALISUUSOLETUKSEN MERKITYS KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ A _____	165
<b>9.4.</b>	<b>KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTI B ODOTUSARVOILLE: YHTÄ SUURTEN VARIANSSIEN TAPAUS _____</b>	<b>165</b>
	TESTAUSASETELMA KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ B _____	165
	HYPOTEEESIT KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ B _____	166
	PARAMETRIEN ESTIMOINTI KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ B _____	167
	TESTISUURE JA SEN JAKAUMA KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ B _____	167
	HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ B _____	169
	P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ B _____	169
	NORMAALISUUSOLETUKSEN MERKITYS KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN t-TESTISSÄ B _____	169
<b>9.5.</b>	<b>t-TESTI PARIVERTAILUILLE _____</b>	<b>169</b>
	PARIVERTAILUASETELMA _____	169
	TESTAUSASETELMA t-TESTISSÄ PARIVERTAILUILLE _____	169
	HYPOTEEESIT t-TESTISSÄ PARIVERTAILUILLE _____	170
	PARAMETRIEN ESTIMOINTI t-TESTISSÄ PARIVERTAILUILLE _____	170
	TESTISUURE JA SEN JAKAUMA t-TESTISSÄ PARIVERTAILUILLE _____	170
	HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN t-TESTISSÄ PARIVERTAILUILLE _____	172
	P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN T-TESTISSÄ PARIVERTAILUILLE _____	172
	NORMAALISUUSOLETUKSEN MERKITYS t-TESTISSÄ PARIVERTAILUILLE _____	172
<b>9.6.</b>	<b>YHDEN OTOKSEN <math>\chi^2</math>-TESTI VARIANSSILLE _____</b>	<b>172</b>
	TESTAUSASETELMA YHDEN OTOKSEN TESTISSÄ VARIANSSILLE _____	172
	HYPOTEEESIT YHDEN OTOKSEN $\chi^2$ -TESTISSÄ VARIANSSILLE _____	172
	PARAMETRIEN ESTIMOINTI YHDEN $\chi^2$ -TESTISSÄ VARIANSSILLE _____	173
	TESTISUURE JA SEN JAKAUMA YHDEN OTOKSEN $\chi^2$ -TESTISSÄ VARIANSSILLE _____	173
	HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN YHDEN OTOKSEN $\chi^2$ -TESTISSÄ VARIANSSILLE _____	174
	P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN YHDEN OTOKSEN $\chi^2$ -TESTISSÄ VARIANSSILLE _____	175

	NORMAALISUUSOLETUKSEN MERKITYS YHDEN OTOKSEN $\chi^2$ -TESTISSÄ VARIANSSELLE	176
<b>9.7.</b>	<b>KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN F- TESTI VARIANSSELLE</b>	<b>176</b>
	TESTAUSASETELMA KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN F-TESTISSÄ VARIANSSELLE	176
	HYPOTEESIT KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN F-TESTISSÄ VARIANSSELLE	177
	PARAMETRIEN ESTIMOINTI KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN F-TESTISSÄ VARIANSSELLE	177
	TESTISUURE JA SEN JAKAUMA KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN F-TESTISSÄ VARIANSSELLE	177
	HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN F-TESTISSÄ VARIANSSELLE	179
	P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN F-TESTISSÄ VARIANSSELLE	180
	NORMAALISUUSOLETUKSEN MERKITYS KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN F-TESTISSÄ VARIANSSELLE	181
<b>10.</b>	<b>TESTEJÄ JÄRJESTYSASTEIKOLLISILLE MUUTTUJILLE</b>	<b>182</b>
<b>10.1.</b>	<b>JÄRJESTYSASTEIKOLLISTEN MUUTTUJIEN TESTIT</b>	<b>183</b>
<b>10.2.</b>	<b>MERKKITESTI</b>	<b>183</b>
	TESTISUUREET S- JA S+	183
	TESTISUUREIDEN S- JA S+ OMINAISUUDET	184
	EKSAKTI MERKKITESTI	184
	STANDARDOITU MERKKITESTISUURE JA SEN ASYMPTOOTTINEN JAKAUMA	184
	KOMMENTTEJA	185
	MERKKITESTI JA PARIVERTAILUASETELMAT	185
<b>10.3.</b>	<b>WILCOXONIN RANKITESTI</b>	<b>185</b>
	TESTISUUREET W- JA W+	186
	TESTISUUREIDEN W- JA W+ OMINAISUUDET	186
	EKSAKTI WILCOXONIN RANKITESTI	187
	STANDARDOITU W-TESTISUURE JA SEN ASYMPTOOTTINEN JAKAUMA	187
	KOMMENTTEJA	188
	WILCOXONIN RANKITESTI JA PARIVERTAILUASETELMAT	188
<b>10.4.</b>	<b>MANNIN JA WHITNEYN TESTI</b>	<b>188</b>
	HYPOTEESIT	189
	MANNIN JA WHITNEYN TESTIN IDEA	189
	TESTISUURE U1 – MUOTO 1	189
	TESTISUURE U1 – MUOTO 2	189
	TESTISUUREEN U1 OMINAISUUDET	190
	TESTISUURE U2 – MUOTO 1	190
	TESTISUURE U2 – MUOTO 2	190
	TESTISUUREEN U2 OMINAISUUDET	190
	TESTISUUREIDEN U1 JA U2 OMINAISUUDET	191
	STANDARDOITU U1-TESTISUURE JA SEN ASYMPTOOTTINEN JAKAUMA	191
	STANDARDOITU U2-TESTISUURE JA SEN ASYMPTOOTTINEN JAKAUMA	191
	KOMMENTTEJA	192
<b>10.5.</b>	<b>WILCOXONIN RANKISUMMATESTI</b>	<b>192</b>
	MANNIN JA WHITNEYN TESTI JA WILCOXONIN RANKISUMMATESTI	192
	TESTISUURE T1	192
	TESTISUURE T2	192
	TESTISUUREIDEN T1 JA T2 OMINAISUUDET	192
	STANDARDOITU T1-TESTISUURE JA SEN ASYMPTOOTTINEN JAKAUMA	193
	STANDARDOITU T2-TESTISUURE JA SEN ASYMPTOOTTINEN JAKAUMA	193
<b>11.</b>	<b>TESTEJÄ LAATUEROASTEIKOLLISILLE MUUTTUJILLE</b>	<b>194</b>
<b>11.1.</b>	<b>LAATUEROASTEIKOLLISTEN MUUTTUJIEN TESTIT</b>	<b>195</b>
<b>11.2.</b>	<b>TESTI SUHTEELLISELLE OSUDELLE</b>	<b>195</b>

TESTAUSASETELMA TESTISSÄ SUHTEELLISILLE OSUUDELLE	195
HYPOTEESIT TESTISSÄ SUHTEELLISILLE OSUUDELLE	196
PARAMETRIEN ESTIMOINTI TESTISSÄ SUHTEELLISILLE OSUUDELLE	196
TESTISUURE JA SEN JAKAUMA TESTISSÄ SUHTEELLISILLE OSUUDELLE	196
HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN TESTISSÄ SUHTEELLISILLE OSUUDELLE	198
P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN TESTISSÄ SUHTEELLISILLE OSUUDELLE	199
<b>11.3. SUHTEELLISTEN OSUUKSIEN VERTAILUTESTI</b>	<b>199</b>
TESTAUSASETELMA SUHTEELLISTEN OSUUKSIEN VERTAILUTESTISSÄ	199
HYPOTEESIT SUHTEELLISTEN OSUUKSIEN VERTAILUTESTISSÄ	200
PARAMETRIEN ESTIMOINTI SUHTEELLISTEN OSUUKSIEN VERTAILUTESTISSÄ	200
TESTISUURE SUHTEELLISTEN OSUUKSIEN VERTAILUTESTISSÄ	201
HYLKÄYSALUEEN MÄÄRÄÄMINEN SUHTEELLISTEN OSUUKSIEN VERTAILUTESTISSÄ	203
P-ARVON MÄÄRÄÄMINEN SUHTEELLISTEN OSUUKSIEN VERTAILUTESTISSÄ	204
<b>12. YHTEENSOPIVUUDEN, HOMOGEENISUUDEN JA RIIPPUMATTOMUUDEN TESTAAMINEN</b>	<b>205</b>
<b>12.1. JAKAUMAOLETUKSIEN TESTAUS</b>	<b>206</b>
<b>12.2. YHTEENSOPIVUUDEN TESTAAMINEN</b>	<b>206</b>
TESTAUSASETELMA $\chi^2$ -YHTEENSOPIVUUSTESTISSÄ	206
HYPOTEESIT $\chi^2$ -YHTEENSOPIVUUSTESTISSÄ	207
HAVAITUT LUOKKAFREKVENSSEIT	207
ODOTETUT LUOKKAFREKVENSSEIT	208
TESTISUURE JA SEN JAKAUMA $\chi^2$ -YHTEENSOPIVUUSTESTISSÄ	209
$\chi^2$ -YHTEENSOPIVUUSTESTI: SOVELLUS	211
<b>12.3. HOMOGEENISUUDEN TESTAAMINEN</b>	<b>215</b>
TESTAUSASETELMA $\chi^2$ -HOMOGEENISUUSTESTISSÄ	215
$\chi^2$ -HOMOGEENISUUSTESTIN SUORITTAMINEN	215
HYPOTEESIT $\chi^2$ -HOMOGEENISUUSTESTISSÄ	216
HAVAITUT FREKVENSSEIT	216
NOLLAHYPOTEESIN TULKINTA $\chi^2$ -HOMOGEENISUUSTESTISSÄ	217
ODOTETTUJEN FREKVENSSEIEN MÄÄRÄÄMINEN	217
TESTISUURE JA SEN JAKAUMA $\chi^2$ -HOMOGEENISUUSTESTISSÄ	219
<b>12.4. RIIPPUMATTOMUUDEN TESTAAMINEN</b>	<b>220</b>
TESTAUSASETELMA $\chi^2$ -RIIPPUMATTOMUUSTESTISSÄ	220
$\chi^2$ -RIIPPUMATTOMUUSTESTIN SUORITTAMINEN	220
HYPOTEESIT $\chi^2$ -RIIPPUMATTOMUUSTESTISSÄ	221
HAVAITUT FREKVENSSEIT	221
NOLLAHYPOTEESIN TULKINTA $\chi^2$ -RIIPPUMATTOMUUSTESTISSÄ	222
ODOTETTUJEN FREKVENSSEIEN MÄÄRÄÄMINEN	222
TESTISUURE JA SEN JAKAUMA $\chi^2$ -RIIPPUMATTOMUUSTESTISSÄ	224
<b>12.5. <math>\chi^2</math>-HOMOGEENISUUSTESTI JA <math>\chi^2</math>-RIIPPUMATTOMUUSTESTI</b>	<b>225</b>
<b>12.6. NORMAALISUUDEN TESTAAMINEN</b>	<b>226</b>
BOWMANIN JA SHENTONIN TESTI NORMAALISUUDELLE	226
TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAN VINOUS JA HUIPUKCUUS	226
HAVAINTOJEN JAKAUMAN VINOUS JA HUIPUKCUUS	227
HYPOTEESIT	228
BOWMANIN JA SHENTONIN TESTI	228
RANKIT PLOT -KUVIO SEKÄ WILKIN JA SHAPIRON TESTI NORMAALISUUDELLE	228
RANKIT PLOT -KUVIO JA WILKIN JA SHAPIRON TESTI: SOVELLUS	229
<b>Lineaarinen regressioanalyysi</b>	<b>231</b>
<b>13. TILASTOLLINEN RIIPPUVUUS JA KORRELAATIO</b>	<b>239</b>
<b>13.1. TILASTOLLINEN RIIPPUVUUS, KORRELAATIO JA REGRESSIO</b>	<b>240</b>

<b>13.2. KAHDEN MUUTTUJAN HAVAINTOAINEISTON KUVAAMINEN</b>	<b>241</b>
PISTEDIAGRAMMI	241
AIKASARJADIAGRAMMI	245
ARITMEETTISET KESKIARVOT	246
OTOSVARIANSSIT JA OTOSKESKIHAJONNAT	247
OTOSKOVARIANSSI	248
OTOSKORRELAATIO	249
OTOSTUNNUSLUKUJEN LASKEMINEN	251
<b>13.3. PEARSONIN KORRELAATIOKERTOIMEN ESTIMOINTI JA TESTAUS</b>	<b>254</b>
OTOS KAKSIULOTTEISESTA NORMAALIJAKAUMASTA	254
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN PARAMETRIEN ESTIMOINTI	255
FISHERIN Z-MUUNNOS	256
KORRELAATIOKERTOIMEN LUOTTAMUSVÄLI	256
KORRELOIMATTOMUUDEN TESTAAMINEN	258
YLEINEN TESTI KORRELAATIOKERTOIMELLE	259
KORRELAATIOKERTOIMIEN VERTAILUTESTI	261
<b>13.4. JÄRJESTYSKORRELAATIOKERTOIMET</b>	<b>262</b>
SPEARMANIN JÄRJESTYSKORRELAATIOKERROIN	262
SPEARMANIN JÄRJESTYSKORRELAATIOKERTOIMEN OMINAISUUDET	263
KORRELOIMATTOMUUDEN TESTAAMINEN	263
KENDALLIN JÄRJESTYSKORRELAATIOKERROIN	264
KENDALLIN JÄRJESTYSKORRELAATIOKERTOIMEN OMINAISUUDET	265
KORRELOIMATTOMUUDEN TESTAAMINEN	265
<b>14. JOHDATUS REGRESSIOANALYYSIIN</b>	<b>266</b>
<b>14.1. REGRESSIOANALYYSIN LÄHTÖKOHDAT JA TAVOITTEET</b>	<b>267</b>
REGRESSIOANALYYSIN TAVOITTEET	267
REGRESSIOMALLIEN LUOKITTELU	267
REGRESSIOANALYYSIN SOVELLUKSET TILASTOTIETEESSÄ	268
REGRESSIOANALYYSIN LÄHTÖKOHDAT	268
<b>14.2. DETERMINISTISET MALLIT JA REGRESSIOANALYYSI</b>	<b>268</b>
DETERMINISTISET MALLIT	268
DETERMINISTISET MALLIT JA REGRESSIO-ONGELMA	269
SYYYT REGRESSIO-ONGELMAN SYNTYYN	269
REGRESSIOMALLI JA KIINTEÄT SELITTÄJÄT	271
<b>14.3. REGRESSIOFUNKTIOT JA REGRESSIOANALYYSI</b>	<b>272</b>
EHDOLLISET JAKAUMAT JA EHDOLLISET ODOTUSARVOT	272
REGRESSIOFUNKTIOT	273
REGRESSIOFUNKTIOT JA ENNUSTAMINEN	273
REGRESSIOFUNKTIOT JA REGRESSIO-ONGELMA	274
REGRESSIOMALLI JA SATUNNAISET SELITTÄJÄT	277
<b>14.4. KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN REGRESSIOFUNKTIOT</b>	<b>277</b>
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	278
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN PARAMETRIT	278
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN PARAMETRIEN TULKINTA	278
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN EHDOLLISET JAKAUMAT	279
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN REGRESSIOFUNKTIOT	279
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN EHDOLLISET VARIANSSIT	281
<b>14.5. REGRESSIOANALYYSIN TEHTÄVÄT</b>	<b>282</b>
<b>14.6. REGRESSIOMALLIN LINEAARISUUS</b>	<b>282</b>
<b>15. YHDEN SELITTÄJÄN LINEAARINEN REGRESSIOMALLI</b>	<b>285</b>
<b>15.1. YHDEN SELITTÄJÄN LINEAARINEN REGRESSIOMALLI JA SITÄ KOSKEVAT OLETUKSET</b>	<b>286</b>
HAVAINNOT	286
YHDEN SELITTÄJÄN LINEAARINEN REGRESSIOMALLI	286
JÄÄNNÖSTERMIÄ KOSKEVAT STOKASTISET OLETUKSET	287

SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN OMINAISUUDET	287
MALLIN PARAMETRIT	288
MALLIN SYSTEMAATTINEN OSA JA SATUNNAINEN OSA	288
REGRESSIOSUORA	289
REGRESSIOSUORAN KULMAKERTOIMEN TULKINTA	289
<b>15.2. REGRESSIOKERTOIMIEN ESTIMOINTI</b>	<b>289</b>
REGRESSIOKERTOIMIEN PNS-ESTIMOINTI	290
ESTIMOITU REGRESSIOSUORA	292
REGRESSIOKERTOIMIEN PNS-ESTIMAATTOREIDEN OMINAISUUDET	293
<b>15.3. SOVITTEET JA RESIDUAALIT</b>	<b>299</b>
SOVITTEIDEN JA RESIDUAALIEN OMINAISUUKSIA	299
SOVITTEET JA RESIDUAALIT: HAVAINNOLLISTUS	300
<b>15.4. JÄÄNNÖSVARIANSSIN ESTIMOINTI</b>	<b>301</b>
<b>15.5. VARIANSSIANALYYSIHAJOTELMA JA SELITYSASTE</b>	<b>302</b>
SELITYSASTE	306
SELITYSASTEEN OMINAISUUDET	307
<b>15.6. LASKUTOIMITUSTEN JÄRJESTÄMINEN</b>	<b>307</b>
ESIMERKKEJÄ ESTIMOINTITULOSTEN TULKINNASTA	312
<b>15.7. PÄÄTTELY YHDEN SELITTÄJÄN LINEAARISESTA REGRESSIOMALLISTA</b>	<b>314</b>
REGRESSIOKERTOIMIEN PNS-ESTIMAATTOREIDEN OTOSJAKAUMAT	314
JÄÄNNÖSVARIANSSIN OTOSJAKAUMA	315
REGRESSIOKERTOIMIEN LUOTTAMUSVÄLIT	316
REGRESSIOKERTOIMIA KOSKEVAT TESTIT	316
<b>15.8. ENNUSTAMINEN YHDEN SELITTÄJÄN LINEAARISELLA REGRESSIOMALLILLA</b>	<b>320</b>
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON ENNUSTAMINEN	320
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON ENNUSTEEN OTOSJAKAUMA	320
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON LUOTTAMUSVÄLI	321
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON LUOTTAMUSVÄLIN OMINAISUUDET	322
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON ENNUSTAMINEN	322
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON ENNUSTEEN OTOSJAKAUMA	322
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON LUOTTAMUSVÄLI	323
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON LUOTTAMUSVÄLIN OMINAISUUDET	323
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON LUOTTAMUSVÄLI VS SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON LUOTTAMUSVÄLI	323
<b>15.9. YHDEN SELITTÄJÄN LINEAARINEN REGRESSIOMALLI JA SATUNNAINEN SELITTÄJÄ</b>	<b>323</b>
<b>15.10. KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN REGRESSIOFUNKTIOIDEN ESTIMOINTI</b>	<b>323</b>
KAKSIULOTTEINEN NORMAALIJAKAUMA JA SEN TIHEYSFUNKTIO	323
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN EHDOLLISET JAKAUMAT	324
OTOS KAKSIULOTTEISESTA NORMAALIJAKAUMASTA	325
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN REGRESSIOFUNKTIOIDEN PNS-ESTIMOINTI	325
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN REGRESSIOFUNKTIOIDEN ESTIMOINTI MOMENTTIMENETELMÄLLÄ JA SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN MENETELMÄLLÄ	333
<b>16. YLEINEN LINEAARINEN MALLI</b>	<b>334</b>
<b>16.1. YLEINEN LINEAARINEN MALLI JA SITÄ KOSKEVAT OLETUKSET</b>	<b>335</b>
HAVAINNOT	335
YLEINEN LINEAARINEN MALLI	336
MALLIA KOSKEVAT STANDARDIOLETUKSET	336
KOMMENTTEJA STANDARDIOLETUKSIIN	337
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN OMINAISUUDET	338
MALLIN PARAMETRIT	338
MALLIN SYSTEMAATTINEN OSA JA SATUNNAINEN OSA	339
REGRESSIOTASO	339

REGRESSIOKERTOIMIEN TULKINTA	339
<b>16.2. YLEISEN LINEAARISEN MALLIN MATRIISIESITYS</b>	<b>340</b>
ODOTUSARVOVEKTORI JA KOVARIANSSIMATRIISI	340
STANDARDIOLETUKSET MATRIISIMUODOSSA	341
<b>16.3. YLEISEN LINEAARISEN MALLIN PARAMETRIEN ESTIMOINTI</b>	<b>342</b>
PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN ESTIMOINTIMENETELMÄ	342
REGRESSIOKERTOIMIEN VEKTORIN PNS-ESTIMAATTORI	342
PNS-ESTIMAATTORIN ODOTUSARVOVEKTORI JA KOVARIANSSIMATRIISI	343
GAUSSIN JA MARKOVIN LAUSE	344
GAUSSIN JA MARKOVIN LAUSEEN TULKINTA	346
PNS-ESTIMAATTORIN STOKASTISET OMINAISUUDET	347
SOVITTEET JA RESIDUAALIT	347
SOVITTEIDEN JA RESIDUAALIEN MATRIISIESITYKSET	348
SOVITTEIDEN JA RESIDUAALIEN OMINAISUUDET	349
SOVITTEIDEN JA RESIDUAALIEN STOKASTISET OMINAISUUDET	350
JÄÄNNÖSVARIANSSIN ESTIMOINTI	351
ESTIMOITU REGRESSIOTASO	353
<b>16.4. VARIANSSIANALYYSIHAJOTELMA JA SELITYSASTE</b>	<b>353</b>
VARIANSSIANALYYSIHAJOTELMAN TULKINTA	356
SELITYSASTE	356
SELITYSASTEEN OMINAISUUDET	357
<b>16.5. TILASTOLLINEN PÄÄTTELY YLEISESTÄ LINEAARISESTA MALLISTA</b>	<b>357</b>
REGRESSIOKERTOIMIEN ESTIMAATTOREIDEN ODOTUSARVOT, VARIANSSIT JA OTOSJAKAUMAT	358
JÄÄNNÖSVARIANSSIN OTOSJAKAUMA	359
REGRESSIOKERTOIMIEN LUOTTAMUSVÄLIT	359
REGRESSIOKERTOIMIEN LUOTTAMUSVÄLIEN TULKINTAT	360
YLEISTESTI REGRESSION OLEMASSAOLOLLE	360
TESTIT YKSITTÄISILLE REGRESSIOKERTOIMILLE	361
<b>16.6. ENNUSTAMINEN YLEISELLÄ LINEAARISELLA MALLILLA</b>	<b>361</b>
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON ENNUSTAMINEN	361
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON ENNUSTEEN OTOSJAKAUMA	362
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON LUOTTAMUSVÄLI	362
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON ENNUSTAMINEN	363
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON ENNUSTEEN OTOSJAKAUMA	363
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON LUOTTAMUSVÄLI	363
SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ODOTETTAVISSA OLEVAN ARVON LUOTTAMUSVÄLI VS SELITETTÄVÄN MUUTTUJAN ARVON LUOTTAMUSVÄLI	364
<b>16.7. YLEINEN LINEAARINEN MALLI JA SATUNNAISET SELITTÄJÄT</b>	<b>364</b>
YLEINEN LINEAARINEN MALLI JA STANDARDIOLETUKSET	364
SELITTÄJIEN SATUNNAISUUS	364
REGRESSIOKERTOIMIEN VEKTORIN PNS-ESTIMAATTORIN HARHATTOMUUS	365
YLEINEN LINEAARINEN MALLI JA MODIFIOIDUT STANDARDIOLETUKSET	
SATUNNAISTEN SELITTÄJIEN TAPAUKSELLE	366
KOMMENTTEJA	366
<b>17. REGRESSIOMALLIN VALINTA</b>	<b>367</b>
<b>17.1. REGRESSIOMALLIN VALINTA: JOHDANTO</b>	<b>368</b>
<b>17.2. YLEINEN LINEAARINEN MALLI</b>	<b>368</b>
MALLIN RAKENNEOSA JA JÄÄNNÖSOSA	369
REGRESSIOKERTOIMIEN PNS-ESTIMAATTORIT JA NIIDEN OMINAISUUDET	369
ESTIMOIDUN MALLIN SOVITTEET JA RESIDUAALIT SEKÄ NIIDEN OMINAISUUDET	370
JÄÄNNÖSVARIANSSIN ESTIMOINTI	371
YLEISEN LINEAARISEN MALLIN RAKENNEOSA JA SEN SPESIFIOINTI	371
MIKSI OIKEIDEN SELITTÄJIEN LÖYTÄMINEN REGRESSIOMALLIIN ON TÄRKEÄTÄ?	372
MIKSI OIKEIDEN SELITTÄJIEN LÖYTÄMINEN REGRESSIOMALLIIN ON VAIKEATA?	372
PUUTTUVIEN SELITTÄJIEN ONGELMA	372

SELITTÄJIEN VALINNAN MENETELMÄT	373
<b>17.3. MALLINVALINTATESTIT</b>	<b>373</b>
ALAPÄIN ASKELLUS	374
ASKELTAVA REGRESSIO	375
<b>17.4. MALLINVALINTAKRITEERIT</b>	<b>375</b>
MALLIVALINTAKRITEERIEN YLEINEN MUOTO	376
MALLINVALINTAKRITEEREIDEN SOVELTAMINEN	376
MALLINVALINTAKRITEEREITÄ	377
JÄÄNNÖSVARIANSSIKRITEERI	377
KORJATTU SELITYSASTE	377
MALLOWSIN $C_p$	378
AKAIKEN INFORMAATIOKRITEERI	379
SCHWARZIN BAYESLAINEN INFORMAATIOKRITEERI	379
<b>17.5. TILASTOLLISET MENETELMÄT TILASTOLLISEN MALLIN VALINNASSA: KOMMENTTEJA</b>	<b>379</b>
<b>17.6. EPÄLINEAARISTEN RIIPPUVUUKSIEN LINEARISOINTI</b>	<b>380</b>
LINEARISOINTI YHDEN SELITTÄJÄN REGRESSIOMALLEISSA	380
LINEARISOIVIEN MUUNNOSTEN ETSIMINEN	381
LINEARISOIVIA MUUNNOKSIA	381
VAATIMUKSET MUUNNOKSILLE	382
<b>18. REGRESSIODIAGNOSTIIKKA</b>	<b>383</b>
<b>18.1. REGRESSIOMALLIT JA REGRESSIODIAGNOSTIIKKA</b>	<b>384</b>
REGRESSIOANALYYSIN PERUSKYSYMYKSET	384
REGRESSIOANALYYSIN PERUSKYSYMYKSET JA REGRESSIODIAGNOSTIIKKA	384
REGRESSIOMALLIN SPESIFIOINTI	385
<b>18.2. YLEINEN LINEAARINEN MALLI</b>	<b>385</b>
MALLIN RAKENNEOSA JA JÄÄNNÖSOSA	386
REGRESSIOKERTOIMIEN PNS-ESTIMAATTORIT JA NIIDEN OMINAISUUDET	387
ESTIMOIDUN MALLIN SOVITTEET JA RESIDUAALIT SEKÄ NIIDEN OMINAISUUDET	387
JÄÄNNÖSVARIANSSIN ESTIMOINTI	389
YLEISEN LINEAARISEN MALLIN RAKENNEOSAN SPESIFIOINTI	389
YLEISEN LINEAARISEN MALLIN JÄÄNNÖSOSAN SPESIFIOINTI	390
SPESIFIOINTIVIRHEIDEN VAIKUTUKSET	390
DIAGNOSTISET TARKISTUKSET	391
<b>18.3. REGRESSIOGRAFIKKA</b>	<b>391</b>
PISTEDIAGRAMMIT	391
RESIDUAALIDIAGRAMMIT	392
AIKASARJADIAGRAMMIT	392
<b>18.4. POIKKEAVAT HAVAINNOT</b>	<b>393</b>
RESIDUAALIT	394
STANDARDOIDUT RESIDUAALIT	395
POISTORESIDUAALIT	395
STANDARDOIDUT POISTORESIDUAALIT	396
VIPULUVUT	397
COOKIN ETÄISYYDET	397
TILASTOGRAFIKKA JA POIKKEAVIEN HAVAINTOJEN TUNNISTAMINEN	398
<b>18.5. REGRESSIOKERTOIMIEN VAKIOISUUS</b>	<b>398</b>
TESTI REGRESSIOKERTOIMIEN VAKIOISUUDELLE	399
TESTIN TOINEN MUOTOILU	400
<b>18.6. MULTIKOLLINEAARISUUS</b>	<b>401</b>
MULTIKOLLINEAARISUUS	401
VARIANSSIN INFLAATIOTEKIJÄ	402
MOMENTTIMATRIISI, OTOSKOVARIANSSIMATRIISI JA OTOSKORRELAATIOMATRIISI	403
MULTIKOLLINEAARISUUDEN TUTKIMINEN	404
<b>18.7. HOMOSKEDASTISUUS JA HETEROSKEDASTISUUS</b>	<b>404</b>
HETEROSKEDASTISUUDEN VAIKUTUKSET	405

HETEROSKEDASTISUUDEN HAVAITSEMINEN	405
HETEROSKEDASTISUUDEN TESTAAMINEN	405
VARIANSSIN STABILOIVAT MUUNNOKSET	406
<b>18.8. AUTOKORRELAATIO</b>	<b>406</b>
KORRELOITUNEISUUDEN VAIKUTUKSET	407
AIKASARJOJEN REGRESSIOMALLIT JA AUTOKORRELAATIO	407
DURBININ JA WATSONIN TESTI 1. KERTALUVUN AUTOKORRELAATIOLE	408
<b>18.9. NORMAALISUUS</b>	<b>409</b>
EPÄNORMAALISUUDEN VAIKUTUKSET	409
BOWMANIN JA SHENTONIN TESTI	409
<b>18.10. MALLIN ENNUSTUSKYKY</b>	<b>410</b>
<b>19. ERITYISKYSYMYKSIÄ YLEISEN LINEAARISEN MALLIN SOVELTAMISESSA</b>	<b>413</b>
<b>19.1. ERITYISKYSYMYKSIÄ YLEISEN LINEAARISEN MALLIN SOVELTAMISESSA:</b>	
<b>JOHDANTO</b>	<b>414</b>
YLEINEN LINEAARINEN MALLI	414
REGRESSIOKERTOIMIEN PNS-ESTIMAATTORIT JA NIIDEN OMINAISUUDET	415
GAUSSIN JA MARKOVIN LAUSE	416
GAUSSIN JA MARKOVIN LAUSEEN TULKINTA	416
KUN PNS-ESTIMAATTORI EI OLE PARAS	417
KUN PNS-ESTIMAATTORIA EI SAA KÄYTTÄÄ	417
<b>19.2. YLEISTETTY PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN MENETELMÄ</b>	<b>417</b>
YLEISTETYN PNS-ESTIMAATTORIN ODOTUSARVO JA KOVARIANSSIMATRIISI	419
MODIFIOITU GAUSSIN JA MARKOVIN LAUSE YLEISTETYLLE	
PNS-ESTIMAATTORILLE	420
YLEISTETYN PNS-ESTIMAATTORIN STOKASTISET OMINAISUUDET	422
LASKETTAVA YLEISTETTY PNS-ESTIMAATTORI	422
PAINOTETTU PNS-ESTIMAATTORI	423
<b>19.3. RAJOITETTU PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN MENETELMÄ</b>	<b>423</b>
RAJOITETUN PNS-ESTIMAATTORIN ODOTUSARVO JA KOVARIANSSIMATRIISI	425
MODIFIOITU GAUSSIN JA MARKOVIN LAUSE RAJOITETULLE	
PNS-ESTIMAATTORILLE	426
RAJOITETUN PNS-ESTIMAATTORIN STOKASTISET OMINAISUUDET	427
RAJOITUSTEN TESTAUS	427
RAJOITUSTEN SPESIFIOINTI	429
<b>19.4. INSTRUMENTTIMUUTTUJAMENETELMÄ</b>	<b>429</b>
REGRESSIOKERTOIMIEN VEKTORIN PNS-ESTIMAATTORIN HARHATTOMUUS	429
INSTRUMENTTIMUUTTUJAMENETELMÄ	431
INSTRUMENTTIEN SPESIFIOINTI	432

## **Varianssianalyysi** **433**

<b>20. YKSISUUNTAINEN VARIANSSIANALYYSI</b>	<b>437</b>
<b>20.1. VARIANSSIANALYYSI: JOHDANTO</b>	<b>438</b>
KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN T-TESTI	438
VARIANSSIANALYYSIN PERUSASETELMA	438
VARIANSSIANALYYSIN NIMI	438
<b>20.2. YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN PERUSASETELMA</b>	<b>438</b>
YKSISUUNTAINEN VARIANSSIANALYYSI JA KOESUUNNITTELU	439
<b>20.3. YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN SUORITTAMINEN</b>	<b>439</b>
HAVAINNOT JA NIIDEN KESKIARVOT	439
VARIANSSIANALYYSIHAJOTELMA	440
TESTI ODOTUSARVOJEN SAMUDELLE	443
KOKONAISNELIÖSUMMAN SST JAKAUMA JA VAPAUASTEET	443
RYHMIEN VÄLISEN VAIHTELUN NELIÖSUMMAN SSG JAKAUMA JA VAPAUASTEET	445



	RYHMIEN SISÄISEN VAIHTELUN NELIÖSUMMA SSE JA VAPAASTEET	446
	COCHRANIN LAUSE	447
	YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN F-TESTISUUREEN JAKAUMA	448
	YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN F-TESTISUUREEN JAKAUMA	449
	VARIANSSIESTIMAATTORIN MSE HARHATTOMUUS	450
	VARIANSSIESTIMAATTORIN MSG HARHATTOMUUS	452
	VARIANSSIANALYYSITÄULUKKO	455
<b>20.4.</b>	<b>YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN MALLI JA SEN PARAMETROINTI</b>	<b>455</b>
	PARAMETROINTI 1	455
	PARAMETROINTI 2	456
	PARAMETROINTIEN 1 JA 2 EKVIVALENSSI	456
	YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN MALLI JA YLEINEN LINEAARINEN MALLI	458
<b>20.5.</b>	<b>YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN MALLIN PARAMETRIEN ESTIMOINTI</b>	<b>459</b>
	YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN MALLI	459
	PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN ESTIMOINTI	459
	PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN ESTIMOINTI YHTÄ SUURTEN ODOTUSARVOJEN TAPAUKSESSA	460
	TESTI ODOTUSARVOJEN SAMUDELLE	461
	SOVITTEET JA RESIDUAALIT	462
<b>20.6.</b>	<b>YKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN MALLIN MATRIISIESITYS</b>	<b>463</b>
	MATRIISIESITYS	463
	PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN ESTIMOINTI	464
<b>20.7.</b>	<b>LASKUTOIMITUSTEN SUORITTAMINEN</b>	<b>466</b>
<b>20.8.</b>	<b>BARTLETTIN TESTI</b>	<b>468</b>
	TESTAUSASETELMA	468
	TESTISUURE JA SEN JAKAUMA	469
<b>20.9.</b>	<b>ODOTUSARVOPARIEN VERTAILU</b>	<b>469</b>
	LUOTTAMUSVÄLIT JA ODOTUSARVOJEN PARIVERTAILU	470
	TESTIT JA ODOTUSARVOJEN PARIVERTAILU	471
	LUOTTAMUSVÄLIEN JA TESTIEN EKVIVALENSSI	472
	SIMULTAANISET LUOTTAMUSVÄLIT JA TESTIT	472
	BONFERRONIN EPÄYHTÄLÖ	472
	BONFERRONIN EPÄYHTÄLÖ JA SIMULTAANISET TESTIT	473
<b>20.10.</b>	<b>KONTRASTIT</b>	<b>474</b>
	KONTRASTI	474
	KONTRASTIEN ESTIMOINTI	475
	KONTRASTEJA KOSKEVAT TESTIT	475
	KONTRASTIEN LUOTTAMUSVÄLIT	478
	ORTOGONAALISTEN KONTRASTIEN TESTAAMINEN	478
<b>21.</b>	<b>KAKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSI</b>	<b>481</b>
<b>21.1.</b>	<b>VARIANSSIANALYYSI: JOHDANTO</b>	<b>482</b>
	KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN T-TESTI	482
	VARIANSSIANALYYSIN PERUSONGELMA	482
<b>21.2.</b>	<b>KAKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN PERUSASETELMA</b>	<b>482</b>
	INTERAKTIO: HAVAINNOLLISTUS	484
	KAKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSI JA KOESUUNNITTELU	485
<b>21.3.</b>	<b>KAKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN SUORITTAMINEN</b>	<b>485</b>
	HAVAINTOJEN KESKIARVOT	485
	VARIANSSIANALYYSIHAJOTELMA	486
	KAKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN TESTIT	488
	NELIÖSUMMIEN JAKAUMAT	490
	VARIANSSIESTIMAATTOREIDEN HARHATTOMUUS	491
	VARIANSSIANALYYSITÄULUKKO	493
<b>21.4.</b>	<b>KAKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN MALLI JA SEN PARAMETROINTI</b>	<b>494</b>
	PARAMETROINTI 1	494
	PARAMETROINTI 2	495
	PARAMETROINTIEN 1 JA 2 EKVIVALENSSI	495

---

<b>21.5. KAKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN MALLIN PARAMETRIEN ESTIMOINTI</b>	<b>497</b>
KAKSISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN MALLI	497
PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN ESTIMOINTI	498
SOVITTEET JA RESIDUAALIT	499
<b>21.6. LASKUTOIMITUSTEN SUORITTAMINEN</b>	<b>500</b>
<b>22. KOLMI- JA USEAMPISUUNTAINEN VARIANSSIANALYYSI</b>	<b>503</b>
<b>22.1. VARIANSSIANALYYSI: JOHDANTO</b>	<b>504</b>
KAHDEN RIIPPUMATTOMAN OTOKSEN T-TESTI	504
VARIANSSIANALYYSIN PERUSONGELMA	504
<b>22.2. KOLMISUUNTAINEN VARIANSSIANALYYSI JA SEN MALLI</b>	<b>504</b>
KOLMISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN PERUSASETELMA	504
KOLMISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN TILASTOLLINEN MALLI	506
KOLMISUUNTAINEN VARIANSSIANALYYSI JA KOESUUNNITTELU	507
<b>22.3. KOLMISUUNTAISEN VARIANSSIANALYYSIN SUORITTAMINEN</b>	<b>507</b>
HAVAINTOJEN KESKIARVOT	507
VARIANSSIANALYYSIHAJOTELMA	508
TESTISUUREET JA NIIDEN JAKAUMAT	510
VARIANSSIANALYYSITAUUKKO	512
<b>22.4. LASKUTOIMITUSTEN SUORITTAMINEN</b>	<b>512</b>