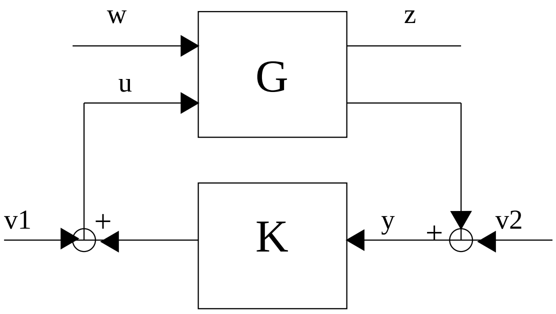
7 Stabilointitehtävä

7.1 Stabiloituvuus

Aloitamme nelilohko-ongelman stabiilisuustarkastelut kirjoittamalla vanha tuttu nelilohkokaavio uudelleen jaottomien faktorisointien avulla. Siinä tapauksessa, että alkuperäisen nelilohko-ongelman takaisinkytkentä on hyvinasetettu Määritelmän 53 mielessä, saadaan lemman 55 korollaarina RH^∞-faktorisointi standardiongelman täydelliselle siirtofunktiolle $\hat{H}_{G,K}$.

Määritelmä 53. *Olkoon* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $\hat{K}$ *aitoja* $RL^\infty(i\mathbf{R})$ *siirtofunktioita, jotka määrittelevät standardiongelman takaisinkytkentäkaavion*



Jos $1 \notin \sigma(\hat{K}(\infty)\hat{G}_{22}(\infty))$ *sanotaan että* $\hat{G}$*:n ja* $\hat{K}$*:n määrittämä takaisinkytkentäkaavio on hyvin asetettu.*

Propositio 54. *Olkoon kaikki kuten Määritelmässä 53. Seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *Siirtofunktioiden* $\hat{G}$*:n ja* $\hat{K}$*:n määrittämä takaisinkytkentäkaavio on hyvin asetettu,*

(ii) $1 \notin \sigma(\hat{G}_{22}(\infty)\hat{K}(\infty))$, *ja*

(iii) *sekä* $\begin{bmatrix} I & -\hat{K}(\infty) \\ -\hat{G}_{22}(\infty) & I \end{bmatrix}$ *että* $\begin{bmatrix} I & \hat{K}(\infty) \\ \hat{G}_{22}(\infty) & I \end{bmatrix}$ *ovat kääntyviä matriiseja*

Todistus. Koska jokaisille rajoitetuille lineaariselle operaattorille A, B pätee $\{0\} \cup \sigma(AB) = \{0\} \cup \sigma(BA)$ ja $1 \neq 0$, ovat väitteet (i) ja (ii) ekvivalentteja.

Edelleen, jokaisille rajoitetuille lineaariselle operaattorille A, B pätee

$$\begin{bmatrix} I & A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ -B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - AB & 0 \\ 0 & I - BA \end{bmatrix}.$$

Selvästi ekvivalentit väitteet (i) ja (ii) yhdessä implikoivat väitteen (iii). Käänteinen suunta on niin ikään triviaali.

$\square$

Hyvinasetettuusehto selvästi toteutuu kaikilla aidoilla rationaalisilla $\hat{K}$, jos siirtofunktio $\hat{G}_{22}$ on täysin aito eli $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$ [15]. Joudumme olettamaan tämän Lauseen 59 käänteisessä suunnassa. Ratkaisemalla Tehtävä 34 huomataan, että mikäli $\hat{G}$:n ja $\hat{K}$:n määrittämä takaisinkytkentäkaavio on hyvin asetettu Määritelmän (53) mielessä, lineaarinen kuvaus

$$H_{G,K} : \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix}$$

on hyvin määritelty. Lisäksi kuvaus voidaan kirjoittaa aidon $RL^\infty(i\mathbf{R})$-siirtofunktion $\hat{H}_{G,K}$ avulla.

Lemma 55. *Olkoon $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ ja $\hat{K}$ nelilohko-ongelmaan liittyviä aitoja $RL^\infty(i\mathbf{R})$ siirtofunktioita. Olkoon $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ ja $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ siirtofunktioiden eräät oikealta jaottomat faktorisoinnit. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) Siirtofunktioiden $\hat{G}$:n ja $\hat{K}$:n määrittämä takaisinkytkentäkaavio on hyvin asetettu Määritelmän (53) mielessä, ja syötteet w, v_1, ja v_2 ovat Laplace-muuntuvia.

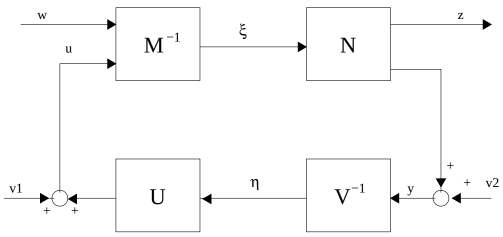
Standardiongelman takaisinkytkentäkaavion määrittelemä lineaarinen kuvaus

$$H_{G,K} : \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix}$$

kaaviossa merkittyjen signaalien välillä on erään lineaarisen systeemin Toeplitz-operaattori, joten vastaava siirtofunktio $\hat{H}_{G,K}$ on aito ja toteuttaa $\hat{H}_{G,K} \in L^\infty(i\mathbf{R})$. Myös loput signaalit z, u, ja y ovat Laplace-muuntuvia.

[15] Näyttäisi, että päästään aika pitkälle olettamalla ainoastaan että $\left[\begin{smallmatrix} I & -\hat{K}(\infty) \\ -\hat{G}_{22}(\infty) & I \end{smallmatrix}\right]$ on kääntyvä.

(ii) Jaottomien faktorisointien $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ ja $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ avulla uudelleen kirjoitetussa standardiongelman takaisinkytkentäkaaviossa



olevat uudet signaalit ξ ja η ovat Laplace-muuntuvia, ja ne toteuttavat aikatason yhtälöt

$$\begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ M_2 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \end{bmatrix} \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -U \end{bmatrix} \\ -N_2 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \tag{25}$$

jossa on hajoteltu standardiongelman takaisinkytkentäkaavion signaalien mukaan $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\hat{N} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{N}_1 & \hat{N}_2 \end{smallmatrix}\right]$.

Toeplitz-operaattoria $\left[\begin{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} M_1 \\ M_2 \end{smallmatrix}\right] \\ -N_2 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -U \end{smallmatrix}\right] \\ V \end{smallmatrix}\right]$ vastaava RH^∞-siirtofunktio on ei-singulaarinen (eli sen determinantti ei identtisesti häviä joukossa $\mathbf{C}_+$), ja sen inverssi on aito $RL^\infty(i\mathbf{R})$-siirtofunktio.

Myös loput signaalit w, v_1, v_2, z, u, ja y ovat Laplace-muuntuvia.

Todistus. Tätä täytyy hetki miettiä ja erityisesti huolehtia, että tarvittavat inverssit ovat aitoja siirtofunktioita. Jätetään lukijalle meditaatioharjoitukseksi.

Selvästi voidaan faktorisoida neliömatriisiarvoisten rationaalifunktioiden tulona

$$\hat{R} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -N_2 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{K} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\hat{G}_{21} & -\hat{G}_{22} \end{bmatrix} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix}.$$

Siirtofunktion $\left[\begin{smallmatrix}\hat{M} & 0\\ 0 & \hat{V}\end{smallmatrix}\right]$ determinantti on skalaarinen rationaalifunktio $s \mapsto \det \hat{M}(s) \det \hat{V}(s)$, joka ei häviä identtisesti jaottoman faktorisoinnin määritelmän perusteella. Edellisen faktorin determinantti on taas yhtä kuin

$$\det \begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -\hat{G}_{22} & I \end{bmatrix},$$

joka ei häviä identtisesti hyvinasetettuusoletuksen perusteella.

Niinpä siirtofunktion $\hat{R}$ determinantti ei häviä identtisesti, ja sen pisteittäinen inverssi $\hat{R}^{-1}$ on olemassa $RL^\infty(i\mathbf{R})$-siirtofunktiona, joka on lisäksi aito. $\square$

Oikealta jaottomien faktorisointien $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ ja $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ pääidea selviää seuraavasta korollaarista:

Korollaari 56. *Olkoon $\hat{G}$, $\hat{N}$, $\hat{M}$, $\hat{N}_2$, $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$, $\hat{K}$, $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ kuten Lemmassa 55. Oleta lisäksi että Määritelmän 53 ehto standardiongelman takaisinkytkentä- kaavion hyvinasetettuudelle on voimassa. Tällöin takaisinkytkentäkaavion*
määrittelemä siirtofunktio $\hat{H}_{G,K}$ voidaan faktorisoida kahden aidon siirtofunktion tulona

$$\hat{H}_{G,K} = \begin{bmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ \hat{M}_2 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1}.$$

joista ensimmäinen on avaruudessa RH^∞ ja jälkimmäinen $RL^\infty(i\mathbf{R})$.

Todistus. Seuraa välittömästi edellisen lemman todistuksesta, katsomalla yhtälöitä (24) ja (25). $\square$

Lause 57. *Olkoon $\hat{G}$, $\hat{N}$, $\hat{M}$, $\hat{N}_2$, $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$, $\hat{K}$, $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ kuten Lemmassa 55. Oleta lisäksi että Määritelmän 53 ehto takaisinkytkentäkaavion hyvinasetettuudelle on voimassa. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) Siirtofunktio $\hat{K}$ on stabiloiva kontrolleri siirtofunktiolle $\hat{G}$ standardiongelman takaisinkytkentäkaavion kytkennässä.

(ii)

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

Todistus. Että väite (ii) implikoi väitteen (i), seuraa Korollaarista 56, koska $\hat{H}_{G,K}$:n faktorisoinnin oikeanpuoleinen tekijä on määritelmän mukaan RH^∞:ssä.

Käänteisen suunnan todistus perustuu faktorisointien oikealta jaottomuuteen, joka tulkitaan Bezoutin identiteetin avulla erään operaattorin kääntyvyydeksi vasemmalta. Faktorisointimuodossa annetun standardiongelman takaisinkytkentäkaavion ja Lemman 55 perusteella saadaan

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ \hat{M}_2 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{N}_2 & 0 \\ \hat{M}_1 & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{y} - \hat{v}_2 \\ \hat{w} \\ \hat{u} - \hat{v}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Koska $\hat{N}$, $\hat{M}$, sekä $\hat{U}$, $\hat{V}$ ovat oikealta jaottomia, Bezoutin identiteetin nojalla on olemassa RH^∞-siirtofunktiot $\hat{\hat{X}}_1$, $\hat{\hat{X}}_2$, $\hat{\hat{Y}}_1$ $\hat{\hat{Y}}_2$, $\hat{\hat{A}}_1$ ja $\hat{\hat{A}}_2$ siten että

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_1 & \hat{\hat{Y}}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\hat{A}}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_2 & \hat{\hat{Y}}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\hat{A}}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ \hat{M}_2 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{N}_2 & 0 \\ \hat{M}_1 & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Kahdesta edellisestä yhtälöstä yhdistelemällä saadaan

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_1 & \hat{\hat{Y}}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\hat{A}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_2 & \hat{\hat{Y}}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\hat{A}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} - \hat{v}_2 \\ \hat{w} \\ \hat{u} - \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_1 & \hat{\hat{Y}}_2 & \hat{\hat{X}}_2 \\ 0 & \hat{\hat{A}}_2 & \hat{\hat{A}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\hat{Y}}_1 & 0 & -\hat{\hat{X}}_2 \\ 0 & -\hat{\hat{A}}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Koska $\left[\begin{smallmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{smallmatrix}\right] = \hat{H}_{G,K} \left[\begin{smallmatrix} \hat{w} \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\hat{H}_{G,K} \in RH^\infty$, väite (ii) seuraa. □

Edellisen Lauseen väite (ii) voitaisin lausua yhtäpitävässä muodossa, että annettu lohkomatriisisiirtofunktio on itseasiassa matriisiarvoinen ulkofunktio.

Stabiloituvuudesta puhutaan, kun annetulle $\hat{G}$ voidaan löytää jokin säätäjä $\hat{K}$, jolla suljetun loopin systeemi on kaikkien signaaliensa puolesta hyvin määritelty ja stabiili. Formaalimmin:

Määritelmä 58. *Sanotaan että siirtofunktio* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ *on stabiloituva, jos on olemassa aito* $RL^{\infty}(i\mathbf{R})$*-säätäjäsiirtofunktio* $\hat{K}$*, siten että*

(i) $\hat{G}$ *ja* $\hat{K}$ *toteuttavat Määritelmän 53 hyvinasetettuus-ehdon, ja*

(ii) standardiongelman takaisinkytkentäkaavion määrittelemä siirtofunktio $\hat{H}_{G,K} \in RH^{\infty}$.

Mikäli käytettävissä on sellainen taltta, jolla annettu RH^{∞}-siirtofunktio voidaan pilkkoa keskenään oikealta jaottomiksi tekijöiksi, voidaan näiden avulla antaa täydellinen karakterisaatio stabiloituvuudelle mikäli vahvempi hyvinasetettuusehto $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$ oletetaan.

Lause 59. *Olkoon* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ *standardiongelmaan liittyvä aito* $RL^{\infty}(i\mathbf{R})$*-siirtofunktio. Olkoon* $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ *sen eräs oikealta jaoton faktorisointi. Hajotetaan faktorit* $\hat{M} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $\hat{N} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{N}_1 & \hat{N}_2 \end{smallmatrix}\right]$ *standardiongelman takaisinkytkentäkaavion signaalien mukaan.*

Nimetään väitteet seuraavasti:

(i) Siirtofunktio $\hat{G}$ *on stabiloituva Määritelmän 58 mielessä.*

(ii) Siirtofunktiot $\hat{M}$ *ja* $\hat{N}_2$ *ovat oikealta jaottomia, sekä* $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right]$ *ovat vasemmalta jaottomia.*

Tällöin (i) $\Rightarrow$ *(ii). Jos lisäksi* $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$*, niin myös (ii)* $\Rightarrow$ *(i).*

Todistus. Oleta (i). Jos $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ stabiloi $\hat{G}$:n, niin silloin Lauseen 57 perusteella $\hat{M}$ ja $\hat{N}_2$ ovat oikealta jaottomia, käyttämällä Korollaarissa 52 annettua oikealta jaottomuusehtoa. Saman korollaarin vasemmalta jaottomuusehto implikoi, että $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -I \end{smallmatrix}\right]\hat{U}$ ovat vasemmalta jaottomia eräälle

$\hat{U}$ joka on peräisin oletetun stabiloivan säätäjän $\hat{K}$ oikealta jaottomasta faktorisoinnista. Bezoutin vasemmanpuoleinen identiteetistä seuraa triviaalisti, että $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -I \end{smallmatrix}\right]\hat{U}$ ovat niin ikään vasemmalta jaottomia.

Oleta (ii). Korollaarin 52 perusteella on olemassa $\hat{X}, \hat{Y} \in RH^\infty$ siten että neliömatriisifunktio

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{X} \\ -\hat{N}_2 & \hat{Y} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty.$$

Edelleen, koska $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right]$ ovat vasemmalta jaottomia, on olemassa $\hat{R}, \hat{T} \in RH^\infty$ siten että Bezoutin identiteetti

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} \hat{R} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \hat{T} = -I_{m \times m} \tag{26}$$

toteutuu. Määrittele $\hat{U} := \hat{T}\hat{X}$ ja $\hat{V} := \hat{Y} - \hat{N}_2 \hat{R} \hat{X}$. Kertomalla yhtälö (26) oikealta $\hat{X}$:llä, ja järjestelemällä termejä saadaan

$$\hat{M}\hat{R}\hat{X} + \hat{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ -U \end{bmatrix}.$$

Suoralla laskulla saadaan nyt

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{X} \\ -\hat{N}_2 & \hat{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \hat{R}\hat{X} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Selvästi $\left[\begin{smallmatrix} I & \hat{R}\hat{X} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} I & -\hat{R}\hat{X} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right] \in RH^\infty$, ja seuraa että $\left[\begin{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right] & \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{smallmatrix}\right] \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{smallmatrix}\right]^{-1} \in RH^\infty$. Mikäli $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ olisivat “kelvollisia”, niin Lauseen 57 perusteella $\hat{K} := \hat{U}\hat{V}^{-1}$ olisi eräs stabiloiva säätäjä.

Tarkistetaan ensin, että V^{-1} on järjellinen aito $RL^\infty(i\mathbf{R})$-siirtofunktio, jolloin $\hat{K}$ olisi edes hyvin määritelty. Selvästi

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\hat{G}_{21} & -\hat{G}_{22} \end{bmatrix} & \hat{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Ottamalla determinantit molemmista puolista, saadaan

$$\det \begin{bmatrix} \hat{M} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I & -\hat{U} \\ -\hat{G}_{22} & \hat{V} \end{bmatrix} \cdot \det \hat{M},$$

ja evaluoimalla tämä pisteessä ∞ huomataan että $\left[\begin{smallmatrix} I & -\hat{U}(\infty) \\ -\hat{G}_{22}(\infty) & \hat{V}(\infty) \end{smallmatrix}\right]$ on kääntyvä. Koska tämän käänteisen suunnan todistuksessa on lisäksi oletettu $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$, seuraa että $\hat{V}(\infty)$ on kääntyvä. Niinpä $\hat{K} := \hat{U}\hat{V}^{-1}$ on hyvin määritelty rationaalinen siirtofunktio.

Koska yhtälön (27) oikea puoli on todettu kääntyväksi avaruudessa RH^∞, seuraa Korollaarin 52 perusteella että $\hat{V}$ ja $\begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix}$ sekä myös $\hat{V}$ ja $\hat{U}$ ovat oikealta jaottomia. Tämä todistaa lauseen. □

(**6. luento v. 2002 päättyi tähän.**)

Tehtävä 60. Annetulle $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ määrittelemälle stabilointiongelmalle voidaan määritellä duaalinen stabilointiongelma korvaamalla siirtofunktio siirtofunktiolla $\hat{G}^\circ(s) := \hat{G}(\overline{s})^*$. Osoita että $\hat{G}$:lle on olemassa stabiloiva säätäjä jos ja vain jos $\hat{G}^\circ$:lle on. Tästä saadaan kolmas, ekvivalentti ehto Lauseeseen 59, $\hat{G}$:n vasemmanpuoleisen jaottoman faktorisoinnin avulla.

Aikaisemmin vihjattiin, että $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ lohkotun siirtofunktion matriisielementti G_{22} olisi jotenkin erikoisasemassa stabilointitehtävään nähden. Nyt on tullut aika täsmentää tätä. Aloitetaan määritelmällä.

Määritelmä 61. *Olkoon siirtofunktio $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{smallmatrix}\right] \in RL^\infty(i\mathbf{R})$ kuten edellä. Sanotaan että $\hat{K} \in RL^\infty(i\mathbf{R})$ stabiloi $\hat{G}_{22}$:n jos*

(i) Määritelmän 53 hyvinasetettuusehto toteutuu, ja

(ii) kuvausta

$$G^\circ_{G,K} : \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

vastaava siirtofunktio $\hat{G}^\circ_{G,K}$ on joukossa RH^∞, jossa signaalien väliset relaatiot ovat

$$\begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = H_{G,K} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Lause 62. *Olkoon siirtofunktio $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right] \in RL^\infty(i\mathbf{R})$ stabiloituva Määritelmän 58 mielessä. Olkoon $\hat{K} \in RL^\infty(i\mathbf{R})$ sellainen aito siirtofunktio, jolle standardiongelman takaisinkytkentäkaavio on signaalien dimensioiden puolesta mielekäs. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) Siirtofunktio $\hat{K} \in$ stabiloi $\hat{G}$:n.

(ii) Siirtofunktio $\hat{K} \in$ stabiloi $\hat{G}_{22}$:n.

Todistus. Triviaalisti väite (i) implikoi väitteen (ii).

Oleta väite (ii). Tarkastellaan ensin mitä vanhalle tutulle takaisinkytkentäkaaviolle kuuluu kun sen ulkoinen syöte $\tilde{w} = 0$. Lauseen 57 todistuksesta saadaan samaa notaatiota käyttämällä, kun $\tilde{w} = 0$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\nu} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\tilde{Y}}_2 & \hat{\tilde{X}}_2 \\ \hat{\tilde{A}}_2 & \hat{\tilde{A}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\tilde{X}}_2 \\ -\hat{\tilde{A}}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{X}}_1 \hat{z} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \hat{\tilde{Y}}_2 & \hat{\tilde{X}}_1 \\ \hat{\tilde{A}}_2 & \hat{\tilde{A}}_1 \end{bmatrix} \hat{G}^{\circ}_{G,K} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\hat{\tilde{X}}_2 \\ 0 & -\hat{\tilde{A}}_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{X}}_1 \hat{z}
\end{aligned} \tag{28}
$$

kaikille syötteille $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in H^2$ (tai ainakin tiheälle joukolle, jotka ovat jatkuvia imaginaariakselilla). Koska $\hat{G}^{\circ}_{G,K} \in RH^{\infty}$ oletuksen mukaan ja kaikki matriisielementit ovat mäååritelmiensä mukaan RH^{∞}:ssä, saadaan siirtofunktio $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{smallmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{smallmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\nu} \end{smallmatrix}\right]$ luokkaan RH^{∞} jos siirtofunktio $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{smallmatrix}\right] \mapsto \hat{z}$ on RH^{∞}:ssa. Koska selvästi $\hat{z} = \hat{N}_2 \hat{\xi}$, jossa $\xi = \xi(v_1, v_2)$, riittää siis osoittaa että siirtofunktio $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{smallmatrix}\right] \mapsto \xi$ on RH^{∞}:ssa.

Koska $\hat{G}$ on stabiloituva, Lause 59 sanoo että on olemassa (Bezoutin identiteetin nojalla) RH^{∞}-funktiot $\hat{\tilde{R}}$ ja $\hat{\tilde{T}}$ siten että $\hat{\tilde{R}}\hat{M} - \hat{\tilde{T}}\hat{N}_2 = I$. Koska

$$
\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{M}\hat{\xi} - \begin{bmatrix} 0 \\ U\eta \end{bmatrix} \\ \hat{N}_2 \hat{\xi} + \hat{V}\eta \end{bmatrix},
$$

niin saadaan

$$
\begin{aligned}
\hat{\tilde{R}} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{T}} \hat{v}_2 &= \left(\hat{\tilde{R}}\hat{M} - \hat{\tilde{T}}\hat{N}_2 \right) \hat{\xi} - \hat{\tilde{R}} \begin{bmatrix} 0 \\ U\hat{\eta} \end{bmatrix} + \hat{\tilde{T}}\hat{V}\hat{\eta} \\
&= \xi - \hat{\tilde{R}} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} - \hat{v}_1 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{T}}\hat{y},
\end{aligned}
$$

koska $\hat{y} = \hat{V}\hat{\eta}$ ja $U\hat{\eta} = \hat{u} - \hat{v}_1$. Termejä siirtelemällä saadaan

$$\begin{aligned}
\xi &= \hat{\hat{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} + \hat{\hat{T}}\hat{v}_2 + \hat{\hat{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} - \hat{v}_1 \end{bmatrix} - \hat{\hat{T}}\hat{y} = \hat{\hat{T}}\hat{v}_2 - \hat{\hat{T}}\hat{y} + \hat{\hat{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{\hat{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\hat{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ -\hat{\hat{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{\hat{T}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\hat{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ -\hat{\hat{T}} \end{bmatrix} \hat{G}^{\circ}_{G,K} \right) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Koska kaikki yllä olevan yhtälön siirtofunktiot ovat RH^∞:ssä saadaan yhtälön (26) kanssa estimaatti

$$||\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} ||_2 \leq C_1 \, || \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} ||_2 \tag{29}$$

jollekin vakiolle $C_1 < \infty$.

Seuraavaksi tarkastellaan täysin vastakkaista tapausta, jossa takaisinkytkentä-
kaavion signaaleista häviävät ulkoiset häiriöt $\hat{v}_1$ ja $\hat{v}_2$, mutta $\hat{w}$ sen sijaan saa elää vapaasti taajuustasossa. Määritellään nyt signaalit $\hat{\xi}$ ja $\hat{\nu}$ kaavalla

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Koska Lauseen 59 mukaan $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right]$ ovat vasemmalta jaottomia, on olemassa (jälleen Bezoutin identiteetin nojalla) RH^∞-funktiot $\hat{R}$ ja $\hat{T}$ siten että $\hat{M}\hat{R} - \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right]\hat{T} = I$. Määritellään uudet muuttujat

$$\begin{cases} \hat{\xi}' := \hat{\xi} - \hat{R}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w} \\ \hat{\eta}' := \hat{\eta}, \end{cases} \tag{30}$$

ja huomataan että

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}' \\ \hat{\eta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1' \end{bmatrix} \\ v_2' \end{bmatrix},$$

jossa

$$\begin{cases} \hat{v}_1' := \hat{T}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w} \\ \hat{v}_2' := \hat{N}_2\hat{R}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w}. \end{cases}$$

Olemme päässeet siis näissä uusissa koordinaateissa tapaukseen, jota käsiteltiin tämän todistuksen ensimmäisessä osassa. Kuvausta $\hat{w} \mapsto \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1' \end{bmatrix} \\ v_2' \end{bmatrix}$ vastaava siirtofunktio on joukossa RH^∞ suoraan näiden uusien signaalien määritelmän perusteella. Kuvausta $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1' \end{bmatrix} \\ v_2' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{\xi}' \\ \hat{\eta}' \end{bmatrix}$ siirtofunktio on puolestaan joukossa RH^∞ tämän todistuksen ensimmäisen osan lopputuloksen, estimaatin (27) perusteella. Niinpä on olemassa vakio $C_2 < \infty$, jolle

$$||\begin{bmatrix} \hat{\xi}' \\ \hat{\eta}' \end{bmatrix}||_2 \leq C_2 \, ||\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{0} \end{bmatrix}||_2$$

ja tästä suoraan yhtälön (30) alkuperäisten muuttujien $\hat{\xi}$ ja $\hat{\eta}$ avulla

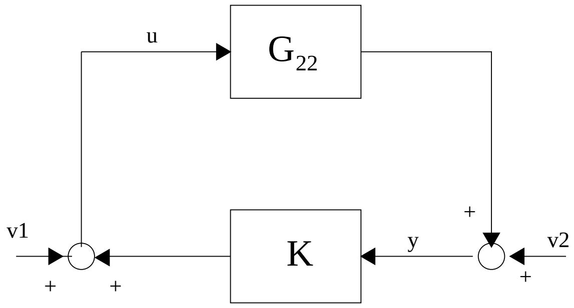
$$(31) \qquad ||\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}||_2 = ||\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}||_2 \leq C_3 \, ||\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{0} \end{bmatrix}||_2$$

eräällä vakiolla $C_3 < \infty$, mielivaltaiselle taajuustason signaalille $\hat{w}$. Lause on nyt todistettu yhdistämällä estimaatit (29) ja (31), ja soveltamalla Lausetta 57. □

Mikä onkaan edellisen lauseen idea? Mikäli stabilointiongelma on ylipäätään ratkeava, niin silloin riittää valita säätäjä $\hat{K}$ siten, että takaisinkytkentäsilmukan "sisäinen osa" stabiloituu. Tämä sisäinen osa muodostuu pelkästään siirtofunktioista $\hat{G}_{22}$ ja $\hat{K}$. Standardiongelman kaaviossa muut kolme siirtofunktiota $\hat{G}_{11}$, $\hat{G}_{12}$ ja $\hat{G}_{21}$ ovat eräässä mielessä silmukan "ulkopuolinen osa", joka on käyttäytyy hyvin kunhan systeemi on stabiloituva ylipäätään jollain säätäjällä $\hat{K}$. Stabiloituvuusoletus on siis eräänlainen tapa vaatia, että siirtofunktiot $\hat{G}_{11}$, $\hat{G}_{12}$ ja $\hat{G}_{21}$ ovat jo "valmiiksi kilttejä", mutta viimeinen osa (johon kontrollerin valinta aidosti "puree") saattaa olla "ikävä".

7.2 Stabiloivien säätäjien Joula-parametrisointi

Edellisen luvun Lauseessa 62 osoitettiin että *stabiloituvan* siirtofunktion $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$ stabiloimiseksi $\hat{K}$:lla on välttämätöntä ja riittävää stabiloida pelkästään siirtofunktio $\hat{G}_{22}$ Määritelmän 61 mielessä. Tämä on selvästi ekvivalenttia sen stabilointiongelman ratkaisemiseksi, jossa muut siirtofunktiot $\hat{G}_{11}$, $\hat{G}_{12}$ ja $\hat{G}_{21}$ häviävät tai niitä vastaavat signaaliavaruudet ovat "nollaulotteisia". Kysymys on siis seuraavan yksinkertaistetun standardiongelman takaisinkytkentäkaavion stabiloimisesta:



Huomaa, että kaavio on täsmälleen standardiongelman takaisinkytkentäkaavio, josta ulkoinen syöte w ja vaste z on poistettu. Aikaisemmissa tarkasteluissa ei ole mitään sellaista, joka kieltäisi näiden signaalien poistamisen[16].

Stabilointiongelman tehtävänä oli nimen omaan *parametrisoida* kaikki stabiloivat säätäjät $\hat{K}$ annetulle $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$, ja tätä kutsutaan kirjallisuudessa Joula-parametrisoinniksi[17]. Tehtävän ratkaisu jakautuu edellisen luvun stabiloituvuustarkastelun nojalla kahteen tapaukseen:

(i) Jos $\hat{G}$ ei ole ylipäätään stabiloituva Määritelmän 58 mielessä, niin stabiloivien säätäjien joukko on tyhjä.

(ii) Jos $\hat{G}$ on stabiloituva, stabiloivien säätäjien $\hat{K}$ parametrisointi on ekvivalentti $\hat{G}_{22}$:n määräämän yksinkertaistetun stabilointitehtävän ratkaisujoukon löytämiselle.

[16] Ts. olettamasta että signaalit w ja z ovat mielivaltaisia aikatason jatkuvia funktioita, joiden arvot ovat nollaulotteisessa vektoriavaruudessa $\{0\}$. (Tämä ei ole huono vitsi, vaan **puhdasta** matematiikkaa.)

[17] Joulan nimen rinnalla esiintyy usein myös nimi Buongiorno (oikeinkirjoitus?)

Tässä luvussa ratkaisemme siis stabilointitehtävän yksinkertaistetussa muodossaan. Kirjoitamme seuraavassa aina $\hat{G} = \hat{G}_{22}$, $\hat{M} = \hat{M}_2$, $\hat{N} = \hat{N}_2$, $\hat{\hat{M}} = \hat{\hat{M}}_2$ ja $\hat{\hat{N}} = \hat{\hat{N}}_2$, ja sovellamme aikaisemmin saatuja tuloksia. Tällöin Lauseen 57 stabilointiehto saa seuraavan muodon:

Lemma 63. *Olkoon $\hat{G}_{22}$ aito RL^∞-siirtofunktio, ja $\hat{G}_{22} = \hat{N}_2\hat{M}_2^{-1} = \hat{\hat{M}}_2^{-1}\hat{\hat{N}}_2$ sen eräs sen oikea ja vasen jaoton faktorisointi. Olkoon säätäjä $\hat{K}$ aito RL^∞-siirtofunktio, ja $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1} = \hat{\hat{V}}^{-1}\hat{\hat{U}}$ eräs sen oikea ja vasen jaoton faktorisointi. Oleta lisäksi että Määritelmän 53 ehto takaisinkytkentäkaavion hyvinasetettuudelle on voimassa. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) Siirtofunktio $\hat{K}$ on stabiloiva kontrolleri siirtofunktiolle $\hat{G}_{22}$ yksinkertaistetun standardiongelman takaisinkytkentäkaavion kytkennässä.

(ii)

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_2 & -\hat{U} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

(iv)

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{V}} & -\hat{\hat{U}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

(v)

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{V}} & \hat{\hat{U}} \\ \hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

Todistus. Väitteet (i) ja (ii) ovat ekvivalentteja erikoistapauksena Lauseesta 57. Koska mielivaltaisille (lohko)matriiseille pätee similaarimuunnos

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -U \\ -N & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix},$$

väitteet (ii) ja (iii) ovat selvästi ekvivalentteja.

Viimeiset kaksi väitettä palautetaan väitteeseen (ii) transponoimalla (eli tarkastelemalla duaalista ongelmaa), jolloin oikeanpuoleiset ja vasemmanpuoleiset jaottomat faktorisoinnit vaihtuvat keskenään, sekä käyttämällä yksinkertaisia similariteettimuunnoksia matriisielementtien järjestelemisessä. □

Edellisessä lemmassa ei tarvittu kaksinkertaisesti jaotonta faktorisointia $\hat{G}_{22}$:lle, mutta Joula-parametrisoinnissa sitä tarvitaan. Kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi on nyt muotoa

$$\begin{cases} \hat{G}_{22} = \hat{N}_2 \hat{M}_2^{-1} = \hat{\tilde{M}}_2^{-1} \hat{\tilde{N}}_2, \\ \begin{bmatrix} \hat{\tilde{X}} & -\hat{\tilde{Y}} \\ -\hat{\tilde{N}}_2 & \hat{\tilde{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{32}$$

Myös säätäjälle tarvitaan oikean ja vasemmanpuoleiset faktorisointia $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1} = \hat{\tilde{V}}^{-1}\hat{\tilde{U}}$, mutta niiden ei tarvitse olla kaksinkertaisesti jaottomia faktorisointeja.

Lause 64. *Olkoon $\hat{G}_{22}$ aito $RL^\infty(i\mathbf{R};\mathbf{C}^{p\times m})$-siirtofunktio, jolle RH^∞-funktiot $\hat{N}_2$, $\hat{M}_2$ $\hat{\tilde{M}}_2$ $\hat{\tilde{N}}_2$, $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{\tilde{X}}$, ja $\hat{\tilde{Y}}$ muodostavat kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin kuten yllä. Olkoon $\hat{K}$ aito $RL^\infty(i\mathbf{R};\mathbf{C}^{m\times p})$-siirtofunktio, ja RH^∞-funktiot $\hat{U}$, $\hat{V}$, $\hat{\tilde{U}}$ $\hat{\tilde{V}}$ kuten yllä.*

Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:

(i) Siirtofunktio $\hat{K}$ on stabiloiva säätäjä siirtofunktiolle G_{22},

(ii) on olemassa $\hat{Q} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{m\times m})$ siten, että molemmat

$$\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1} \quad ja \quad \left(\hat{\tilde{X}} - \hat{Q}\hat{\tilde{N}}_2\right)^{-1} \tag{33}$$

ovat olemassa rationaalifunktioina, sekä

$$\hat{K} = \left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1},$$

ja

(iii) on olemassa $\hat{Q} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{m\times m})$ siten, että kaavan (33) molemmat inverssit ovat olemassa rationaalifunktioina, sekä

$$\hat{K} = \left(\hat{\tilde{X}} - \hat{Q}\hat{\tilde{N}}_2\right)^{-1}\left(\hat{\tilde{Y}} - \hat{Q}\hat{\tilde{M}}_2\right).$$

Rationaalifunktiota $\hat{Q}$ kutsutaan säätäjän K Joula-parametriksi. Koska

$$\left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1} = \left(\hat{\tilde{X}} - \hat{Q}\hat{\tilde{N}}_2\right)^{-1}\left(\hat{\tilde{Y}} - \hat{Q}\hat{\tilde{M}}_2\right), \tag{34}$$

ei ole tarvetta tehdä eroa "oikeanpuoleisten" ja "vasemmanpuoleisten" Joula-parametrien välillä. Lisäksi Lauseen 64 väitteet (ii) ja (iii) ovat ekvivalentteja. Yhtälö (34) todistuu kertomalla kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin yhtälö molemmilta puolilta ulkofunktiolla ja sen inverssillä

$$\begin{bmatrix} I_{m\times m} & -\hat{Q} \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m\times m} & \hat{Q} \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix},$$

josta saadaan suoraan

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2 & -\hat{\hat{Y}} + \hat{Q}\hat{\hat{M}}_2 \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q} \\ \hat{N}_2 & \hat{N}_2 - \hat{X}\hat{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Tämän matriisiyhtälön "ristitermi" antaa yhtälön (34), koska molemmat inverssit $\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1}$ ja $\left(\hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2\right)^{-1}$ ovat olemassa rationaalisina funktioina[18]. Siirrytään todistamaan itse Joula-parametrisoinnin lause.

Todistus. Oleta (ii), ja olkoon $\hat{Q} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{m\times m})$. Määrittele

$$\hat{U} := \hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}, \quad \hat{V} := \hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}.$$

Tällöin $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$, mikäli $\hat{V}^{-1}$ on olemassa rationaalifunktiona. Todistetaan että $\hat{K}$ on stabiloiva säätäjä, ja että se on annettu erään oikealta jaottoman faktorisointinsa muodossa.

Kaava (35) voidaan kirjoittaa uudelleen

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2 & -\hat{\hat{Y}} + \hat{Q}\hat{\hat{M}}_2 \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}.$$

Koska edellisen yhtälön vasemmanpuoleisin faktori on RH^∞-funktio, joten $\begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty$. Korollaarin 52 perusteella $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ ovat oikealta jaottomia, ja antavat siis säätäjäkandidaatille $\hat{K}$ oikealta jaottoman faktorisoinnin. Lemman 63 väitteestä (iii) seuraa vihdoin, että $\hat{K}$ on stabiloiva säätäjä.

[18]Tämänkin kysymyksen Francisin kirja ohittaa typerästi. Kysymys on lähinnä siitä, tarvitseeko erikseen olettaa molempien inverssien olemassaolo. Jos tarvitsee, niin silloin Joula-parametrien $\hat{Q}$ joukkona ei olekaan kaikki rationaalifunktiot, vaan niiden eräs paljon vaikeammin käsiteltävä osajoukko.

Oleta (i), ja olkoon $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ eräs stabiloivan säätäjän oikealta jaoton faktorisointi. Kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin kaavasta (32) saadaan

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & \hat{\hat{X}}\hat{U} - \hat{\hat{Y}}\hat{V} \\ 0 & \hat{D} \end{bmatrix}, \tag{36}$$

jossa $\hat{D} := \hat{\hat{M}}_2\hat{V} - \hat{\hat{N}}_2\hat{U} \in RH^\infty$. Ottamalla molemmilta puolilta determinantit, havaitaan että

$$\det(\hat{D}) = \det \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}.$$

Matriisifunktioista vasemmanpuoleinen on RH^∞-ulkofunktio kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin määritelmän perusteella. Oikeanpuoleinen on taas ulkofunktio Lemman 63 perusteella, koska $\hat{K}$ on oletettu stabiloivaksi säätäjäksi. Niinpä $\det(\hat{D})$ on skalaariarvoinen RH^∞-ulkofunktio, ja seurauksena $\hat{D}^{-1} \in RH^\infty$ napoja tarkastelemalla. Voidaan siis määritellä

$$\hat{Q} := -\left(\hat{\hat{X}}\hat{U} - \hat{\hat{Y}}\hat{V}\right)\hat{D}^{-1} \in RH^\infty,$$

joka ilmenee hetken päästä olevan Joula-parametriksi sopiva.

Käyttämällä kaksinkertaisesti jaotonta faktorisointia (32), mutta vaihtamalla lohkomatriisien järjestystä (mahdollista, koska kyseessä on äärellisulotteiset matriisit!) saadaan

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m\times m} & -\hat{Q}\hat{D} \\ 0 & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\hat{D} \\ \hat{N}_2 & \left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)\hat{D} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poimimalla $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ saadaan $\hat{K} = \left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1}$, ja erityisesti $\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1}$ on olemassa rationaalifunktiona. Todistus on näin lähes valmis. Tekemällä sama analyysi duaalipuolella, havaitaan, että myös inverssi $\left(\hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2\right)^{-1}$ on olemassa, ja väite (ii) seuraa. □

(**7. luento v. 2002 päättyi tähän.**)