6 Jaollisuusteoriaa

Stabilointitehtävän ratkaisu perustuu tietyn “kaksinkertaisesti jaottoman” faktorisoinnin laskemiseen systeemin siirtofunktioille. Tämä johtaa meidät skalaaritapauksessa algebrallisiin jaottomuustarkasteluihin renkaassa $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$. Käyttämällä algebrallisia tekniikoita (kuten Vidyasagarin kirjassa) nämä tekniikat saadaan yleistettyä matriisitapaukseen.

6.1 Jaollisuusteoriaa pääideaalialueissa

Oletamme seuraavassa, että lukija on perillä algebrallisten renkaiden teorian perusteista, ja seuraava teksti on lähinnä vain tarkoitettu oikeaan “tunnelmaan” pääsemiseksi.

Merkitään (kompleksikertoimisia) polynomien rengasta symbolilla $\mathbf{C}[x]$, ja sen (muodollisten) osamäärien rengasta eli *jakokuntaa* (field of fractions) symbolilla $\mathbf{C}(x)$. Selvästi $\mathbf{C}(x)$ on täsmälleen kompleksiarvoisten rationaalifunktioiden joukko $\mathbf{C}$:ssä. Tarvitsemme myös kolmatta rengasta, joka on vanha tuttu avaruus

$$\begin{aligned} &RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}) \\ &= \{f = p/q \in \mathbf{C}(x) \quad | \quad \text{kaikki navat joukossa } \mathbf{C}_- \text{ ja } \deg p \leq \deg q\}. \end{aligned}$$

Renkaan $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$ jakokunta on niin ikään kaikkien rationaalifunktioiden joukko $\mathbf{C}(x)$. Tämä on selvää koska

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x+1)^k} \cdot \left(\frac{q(x)}{(x+1)^k}\right)^{-1}$$

jossa $k := \max(\deg p, \deg q)$.

Suoraan määritelmän perusteella osoitetaan, että nämä kaikki edelliset joukot ovat ykkösellä varustettuja kommutatiivisia renkaita — ja paljon enemmänkin. On tarpeen tuntea myös renkaiden $\mathbf{C}[x]$ ja $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$ kääntyvien alkioiden eli ko. renkaitten *yksikköjen* (unit) joukko. Polynomi $p \in \mathbf{C}[x]$ on kääntyvä jos ja vain jos se on vakiopolynomi. Funktio $r \in RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$ on kääntyvä jos ja vain jos $r(s) \neq 0$ kaikilla $s \in \mathbf{C}_+$ ja lisäksi $\lim_{|s|\to\infty} |r(s)| > 0$. Tällaisia funktioita kutsutaan funktioteoriassa *rationaalisiksi (skalaarisiksi) H^∞-ulkofunktioiksi.*

Renkaat $\mathbf{C}[x]$ ja $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$ on itse asiassa kommutatiivisia *kokonaisalueita* (englanniksi domain tai integral domain). Tämä tarkoittaa, että kahden alkion tulo on nolla ainoastaan jos jompi kumpi tekijöistä on nolla — aitoja nollantekijöitä siis ei ole.

Jatkossa tarvitsemme jaottomuustuloksia ainoastaan renkaassa $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$ sekä sen matriisiarvoisessa varianteissa $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$ [11]. Siitä huolimatta seuraava jaollisuusteoria lienee selkeintä esittää alkaen ykkösellisestä, kommutatiivisesta renkaasta R, ja lisäämällä sitten pikkuhiljaa aksioomeja.

Olkoon $f, g, r \in R$ mielivaltaisia. Mikäli $f = rg$, niin sanotaan että r *jakaa* f:n, eli symbolein $r|f$. Jo alaluokilla opetettiin *suurimmasta yhteisestä tekijästä (s.y.t)* ja *pienimmästä yhteisestä jaettavasta (p.y.j)* kommutatiivisessa kokonaisalueessa $\mathbf{Z}$, vaikka sitä ei silloin toivottavasti kutsuttu tällä nimellä.

Nämä käsitteet voidaan määritellä yleisemmin missä tahansa renkaassa, mutta tästä on maksettava hinta menetettynä yksikäsitteisyytenä:

Määritelmä 36. *Olkoon $f, g, r \in R$, jossa R on mielivaltainen ykköellinen kommutatiivinen rengas.*

(i) Alkio r on alkioitten f, g suurin yhteinen tekijä, mikäli $r|f$, $r|g$, sekä $r'|f, r'|g \Rightarrow r|r'$. Tällöin kirjoitetaan $r \in s.y.t.(f,g)$.

(ii) Alkio r on alkioitten f, g suurin yhteinen jaettava , mikäli $f|r$, $g|r$, sekä $f|r', g|r' \Rightarrow r'|r$. Tällöin kirjoitetaan $r \in p.y.j.(f,g)$.

(iii) Alkiot f, g ovat jaottomia, jos jokainen $r \in s.y.t.(f,g)$ on yksikkö.

Sekä s.y.t. että p.y.j. ovat määriteltyjä (silloin kun ovat ylipäätään olemassa) ainoastaan modulo renkaan yksiköt, ja siksi niitä merkittiin edellisessä määritelmässä joukkoina. Renkaassa $\mathbf{Z}$ alkio 1 on ainoa yksikkö, jolloin s.y.t. ja p.y.j. ovat yksikäsitteisesti määrättyjä. Mikäli rengas on kunta, niin kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat yksikköjä, ja kaikki jaottomuustarkastelut trivialisoituvat. Kommutatiivisissa kokonaisalueissa (kuten $\mathbf{C}[x]$ ja $RH^\infty(\mathbf{C}_+;C)$) voidaan parametrisoida kaikki $r \in s.y.t.(f,g)$ yksiköitten avulla, koska

$$s.y.t.(f,g) = \{r_0 e \quad | \quad e \in R \text{ on yksikkö}\}$$

[11] Jälkimmäiset eivät ole yleensä edes renkaita, koska väärändimensioisia matriiseja on paha mennä kertomaan keskenään

mielivaltaiselle kiinteälle $r_0 \in s.y.t.(f,g)$.

Olemme jauhaneet jo pitkään s.y.t.stä ja jaottomuudesta, mutta emme ole sanallakaan ottaneet kantaa siihen, onko ylipäätään kahdella alkiolla $f, g \in R$ olemassa jokin $r \in s.y.t.(f,g)$. Olemassaolokysymyksen ratkaisuun tarvitaan hieman vahvempi oletus. Mikäli kommutatiivisen, ykkösellisen kokonaisalueen R jokainen ideaali I[12] on yhden (ideaalista I riippuvan) alkion $a \in R$ virittämä,

$$I = \{ar \quad | \quad r \in R\} = aR,$$

sanotaan että R on *pääideaalialue (principal ideal domain)*. Yksinkertaisin esimerkki pääideaalialueesta on Z, jonka ideaalit ovat kaikki muotoa $I_n = n\mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Propositio 37. *Olkoon R kommutatiivinen, ykkösellinen pääideaalialue. Tällöin jokaisella $f, g \in R$ on olemassa $r \in s.y.t.(f,g)$. On myös olemassa $t \in p.y.j.(f,g)$, joka toteuttaa yhtälön $r_0 t = fg$ kun $r_0 \in s.y.t.(f,g)$ on mielivaltainen.*

S.y.t. ja p.y.j. ovat olemassa myös mille tahansa äärelliselle kokoelmalle funktioita, mutta tämä ei olennaisesti eroa kahden elementin tapauksesta. Olemme erityisen onnellisia siitä, että rengas $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$ osoittautuu seuraavassa luvussa pääideaalialueeksi, ja vahvemmin jopa nk. aidoksi Euklidiseksi alueeksi.

Kommutatiivisen pääideaalialueessa R kutsutaan alkiota $f \neq 1$ *jaottomaksi* (prime), mikäli

$$r|f \Rightarrow r = 1 \text{ tai } r = pe \text{ jollakin yksiköllä } e \in R$$

Pääideaalialueen erityinen viehätys on siinä, että jokainen alkio f voidaan olennaisesti yksikäsitteisesti jakaa jaottomien alkioiden eli *alkutekijöidensä* kommutoivaksi tuloksi.

Lemma 38. *Olkoon R kommutatiivinen pääideaalialue, ja $f \in R$. Tällöin on olemassa joukko $\{\,p_j\}_{j=1,\cdots,n} \subset R$ jaottomia alkioita, siten että*

$$f = \prod_1^n p_j.$$

Tällainen esitys on tulon järjestystä ja tulontekijöiden kertomista yksiköillä $\{\,e_j\}_{j=1,\cdots,n}$, $\prod_1^n e_j = 1$ vaille yksikäsitteinen.

[12] Hae määritelmä tälle vaikkapa Jacobsonin Basic Algebra I:sta.

Todistus. Edelleen algebran perusteita. Loytyvät mm. Vidyasagarin kirjasta sivulta 382 mutta ihan mistä muualta tahansakin. □

Meiltä puuttuu edelleen konkreettisia testejä, jolla tarkastetaan kahden alkion $f, g \in R$ jaottomuus. Pääideaalialueessa on olemassa koko joukko karakterisointeja.

Lemma 39. *Olkoon R kommutatiivinen, ykkösellinen pääideaalialue. Olkoon $f, g \in R$ mielivaltaisia. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *Alkiot f, g ovat keskenään jaottomia,*

(ii) $1 \in s.y.t.(f, g)$,

(iii) *alkioilla f, g ei ole yhteistä alkutekijää, ja*

(iv) *on olemassa alkiot $x, y \in R$, siten että nk. Bezoutin identiteetti*

$$fx + gy = \begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = 1$$

toteutuu.

Todistus. Missä tahansa algebran oppikirjassa, mutta onnistuu myös kokoamalla Vidyasagarin kirjan tuloksista. □

6.2 $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ Euklidisena alueena

Ehkäpä hedelmällisimmillään jaollisuusteoria on esitettävissä nk. Euklidisissa alueissa (Euclidian domain). Ne ovat kommutatiivisia kokonaisalueita (ja ilmenevät olevan jopa pääideaalialueita), joissa kaikille alkioille $r \in R$ voidaan määritellä *aste* $\delta(r)$ kuvauksena $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}_+$. Tämän astefunktion olennainen ominaisuus on se, että se toimii kivasti alaluokilta tutuissa polynomien jakokulma-tyyppisissä laskuissa. Tarkemmin, mielivaltaisilla $f, g \in R$ on olemassa $r \in R$ siten että joko $f = rg$ tai

$$\delta(f - rg) < \delta(g). \tag{20}$$

Tämä tarkoittaa karkeasti sitä, että voidaan laskea "eteenpäin jakokulmassa" niin että jakojäännöksen $f - rg$ aste on pienempi kuin jakajan g, mikäli jako ei mene tasan. Vaaditaan myös, että astefunktio on ei-nouseva funktio jaollisuusmielessä

$$r|f \Rightarrow \delta(r) \le \delta(f).$$

Tällöin $\delta(1) \le \delta(r)$ kaikilla $r \in D$, ja mitään olennaisesti muuttamatta voidaan vaatia, että $\delta(1) = 0$. Seuraa välittömästi että $\delta(r) = \delta(re)$ jos $e \in R$ on mielivaltainen yksikkö. Edelleen $\delta(e) = 0$ kun e on yksikkö, ja tästä johtuen kunnat suljetaan triviaaleina pois Euklidisista alueista.

Osoittautuu että jokainen Euklidinen alue on pääideaalialue. Todistus on lähes triviaali, ja perustuu siihen että jokaisesta ideaalista I voidaan löytää alkio a, joka minimoi asteen $\delta(a) \le \delta(x)$ kaikilla $x \in I$. Tällöin mielivaltaista $r \in I$ kohden on olemassa $q \in R$ siten että joko $\delta(r - qa) < \delta(a)$ tai $a|r$. Mutta edellinen ei tule kysymykseen minimaalisuuden perusteella, joten $a|r$ ja $I = aR$.

Sekä $\mathbf{C}[x]$ että $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ ovat nk. *aitoja (proper)* Euklidisia alueita, kun astefunktioksi otetaan polynomin tavanomainen aste $\deg p$ ensimmäisessä tapauksessa, ja jälkimmäisessä

$$\begin{aligned} \delta(r) &= \#\{z \in \overline{\mathbf{C}_+} \quad | \quad r(z) = 0\} + \deg q - \deg p \\ &= \#\{z \in \overline{\mathbf{C}}_+ \cup \infty \quad | \quad r(z) = 0\} \end{aligned} \tag{21}$$

jossa $r = p/q$ on annettu kahden polynomien osamääränä. Kukin nollakohta on laskettu niin monta kertaa kuin sen kertaluku osoittaa, ja luku $\deg q - \deg p$ on tulkittu rationaalifunktion r nollankohdan ∞ kertaluvuksi luonnollisella tavalla. Voidaan siis sanoa että $\delta(r)$ on nollakohtien lukumäärä (kertalukuineen laskettuna) laajennetussa suljetussa oikeassa puolitasossa $\overline{\mathbf{C}}_+ \cup \{\infty\}$. Euklidisen alueen aitous tarkoittaa määritelmän mukaan

$$\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g).$$

Nyt on aika siirtyä meitä eniten kiinnostavan renkaan, nimittäin stabiilien skalaarisiirtofunktioiden joukon $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$:n pariin. Useimmissa algebran oppikirjoissa ei tätä rengasta käsitellä lainkaan, ja se lienee mielenkiintoinen lähinnä algebrallisesta säätöteoriasta kiinnostuneille.[13] Sensijaan Vidyasagarin Control System Synthesis -kirja on lähestulkoon omistettu tälle renkaalle, ja aivan kirjan alussa, sivulla 10, on todistettu seuraava lemma.

Lemma 40. *Rengas $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ on aito Euklidinen alue, varustettuna yhtälön (21) astefunktiolla $\delta : RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}) \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}_+$.*

[13] Innokas Rudin-fani löytää eräästä hänen kirjastaan lauseen, jossa analyyttisten funktioiden avaruus on osoitettu pääideaalialueeksi. Mutta enpä sano mistä.

Polynomirengas $\mathbf{C}[x]$ on esimerkki aidosta euklidisesta alueesta, jossa astefunktio toteuttaa lisäksi $\delta(f+g) \leq \max(\delta(f), \delta(g))$. Tästä lisäoletuksesta seuraa, että kullekin f, g on olemassa *yksikäsitteinen* $r \in R$ siten että joko $f = rg$ tai aste-ehto (20) toteutuu. Rengas $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ ei toteuta tätä lisäehtoa, eikä myöskään mainittua yksikäsitteisyysehtoa.

Erityisesti Euklidisten alueiden $\mathbf{C}[x]$ ja $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ tapauksessa voidaan antaa vieläkin konkreettisempia ehtoja jaottomuudelle, jotka ovat sukua Lemman 39 väitteen (iii) ehdolle. Ensin on tarpeen identifioida molempien renkaitten jaottomat elementit.

Algebran perusteista muistetaan, että kompleksikertoimiset polynomit voidaan kirjoittaa keskenään kommutoivien monomien $x - \alpha_j$ tulona [14], jossa luvut α_j ovat polynomin nollakohdat. Edelleen, monomit $x - \alpha$, $\alpha \in \mathbf{C}$ (vakiopolynomien ohella) ovat täsmälleen polynomirenkaan $\mathbf{C}[x]$ jaottomat elementit.

Renkaan $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ tapauksessa voidaan antaa samanlainen ehto.

Lemma 41. *Euklidisen alueen jaottomat $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ alkiot ovat täsmälleen rationaalifunktiot muotoa*

$$r_\alpha(s) = \frac{1}{s-\alpha}, \quad t_{\beta,\gamma}(s) = \frac{s-\beta}{s-\gamma},$$

jossa $\Im\alpha, \Im\gamma < \infty$, $\beta \neq \gamma$.

Todistus. Eiköhän mene ihan määritelmän perusteella. □

Huomaa, että r_α on yksikkö ja $\delta(r_\alpha) = 0$. Sensijaan $t_{\beta,\gamma}$ on yksikkö ainoastaan jos ja vain jos $\Im\beta < 0$. Mikäli $\Im\beta \geq 0$, niin silloin $\delta(t_{\beta,\gamma}) = 1$.

Korollaari 42. *Alkiot $f, g \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ ovat jaottomia jos ja vain jos niillä ei ole yhteisiä nollakohtia laajennetussa suljetussa oikeassa puolitasossa $\overline{\mathbf{C}}_+ \cup \{\infty\}$.*

Pääideaalialueessa $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ jokainen alkio voidaan siis esittää Lemman 38 nojalla olennaisesti yksikäsitteisesti alkutekijöittensä tulona. Tästä seuraa (kuten jokaisessa pääideaalialueessa), että s.y.t. ja p.y.j. voidaan eksplisiittisesti kuvata alkutekijöiden avulla, jotka $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ tapauksessa johtavat meidät katsomaan nollakohtia laajennetussa, suljetussa oikeassa puolitasossa $\overline{\mathbf{C}}_+ \cup \{\infty\}$.

[14] Algebran peruslauseen avulla, joka sanoo että $\mathbf{C}$ on nk. algebrallisesti suljettu kunta.

Korollaari 43. *Alkioiden $f, g \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ suurin yhteinen tekijä on se tulo*

$$r(s) = \frac{1}{(s+1)^{n_2}} \prod_{j=1}^{n_1} t_{\beta_j,\gamma_j}(s)$$

Lemmassa 41 annetuista jaottomista elementeistä, jonka funktion r nollakohdat joukossa $\overline{\mathbf{C}}_+ \cup \{\infty\}$ ovat täsmälleen, kertalukua myöten, leikkaus funktioiden f, g nollakohdista samassa joukossa.

Korollaari 44. *Mielivaltaisella $\hat{G} \in \mathbf{C}(x)$ on olemassa esitys eli jaoton faktorisointi $\hat{G} = f/g$ jossa $f, g \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ ovat jaottomia. Erityisesti, tämä esitys voidaan tehdä osajoukolle $RL^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C})$, sekä myös kaikille (aidoille) äärellisdimensioisten skalaari-(SISO)-systeemien siirtofunktioille.*

6.3 Jaottomat faktorisoinnit matriisiarvoisessa tapauksessa

Edellä esitetty skalaarifunktioiden $f \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C})$ jaottomuusteoria on tietyiltä osin yleistettävissä matriisi-arvoisten funktioiden $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p\times m})$ luokkaan. Lemmassa 50 osoitamme, että matriisiarvoisilla siirtofunktioilla $\hat{G} \in L^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p\times m})$ on olemassa nk. kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi kahden matriisiarvoisen RH^∞-funktion osamääränä. Tämä on esitettyjen jaottomuustarkastelujen päätulos, jolle stabiloivien säätäjien parametrisointi tulee seuraavassa luvussa perustumaan. Kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin olemassaolo perustuu pienimmän yhteisen oikean tekijän olemassaoloon RH^∞-matriisifunktioille. Algebrallisia komplikaatioita välttääksemme jätämme aputulosten todistukset viittausten varaan.

Aloitetaan kuitenkin määritelmistä. Että siirtofunktio $\hat{R}$ jakaa siirtofunktion $\hat{F}$ oikealta (vastaavasti vasemmalta) RH^∞:ssä, tarkoittaa että $\hat{F} = \hat{G}\hat{R}$ (vastaavasti $\hat{F} = \hat{R}\hat{G}$) jollain $\hat{G} \in RH^\infty$, jossa dimensiot ovat järkeviä. Siirtofunktioiden $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_1\times m})$ ja $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_2\times m})$ *suurin yhteinen oikea tekijä* on neliömatriisiarvoinen siirtofunktio $\hat{R} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{R\times m})$, joka jakaa molemmat $\hat{F}$ ja $\hat{G}$ oikealta, ja lisäksi jokainen muu oikea tekijä $\hat{R}'$ jakaa funktion $\hat{R}$. *Suurin yhteinen vasen tekijä* määritellään analogisesti.

Määritelmä 45. *(i) Kaksi siirtofunktiota $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_1\times m})$ ja $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_2\times m})$ ovat oikealta jaottomia ("yli RH^∞:n") jos $I_{m\times m}$ on eräs niiden suurin yhteinen oikea tekijä (s.y.o.t.).*

(ii) Analogisesti, $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p\times m_1})$ *ja* $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p\times m_2})$ *ovat vasemmalta jaottomia ("yli* RH^∞*:n") jos on* $I_{p\times p}$ *on eräs niiden suurin yhteinen vasen tekijä (s.y.v.t.).*

Skalaaritapauksessa todettiin, että pienin yhteinen tekijä on olemassa silloin kun rengas R on (kommutatiivinen, ykkösellinen) pääideaalialue. Jos taas kaksi matriisia $F, G \in M(R)$ (eli niiden elementit ovat pääideaalialueessa R), on s.y.o.t. olemassa mikäli matriiseilla on yhtä monta pystyrivia. Koska $RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_1\times m})$ on pääideaalialue, voidaan tulos kirjoittaa suoraan rationaalisille siirtofunktioille seuraavasti:

Lemma 46. *Olkoon siirtofunktiot* $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_1\times m})$ *ja* $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_2\times m})$*. Tällöin on olemassa* $\hat{R} \in s.y.o.t(\hat{F}, \hat{G})$*.*

Todistus. Vidyasagarin kirjassa s. 68 annettu sinänsä elementaari todistus perustuu lohkomatriisin $[F \quad G]^T$ reduktioon yläkolmiomuotoon (nk. Hermiten muoto), kertomalla se oikealta eräällä kääntyvällä R-elementtisellä neliömatriisilla $T \in M(R)$. $\square$

Bezoutin identiteetti on edelleen karakterisaatio, joka toimii matriisiarvoisilla funktioilla.

Lemma 47. *(i) Kaksi siirtofunktiota* $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_1\times m})$ *ja* $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p_2\times m})$ *ovat oikealta jaottomia ("yli* RH^∞*:n") jos ja vain jos on olemassa siirtofunktiot* $\hat{\tilde{X}} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p\times p_1})$ *ja* $\hat{\tilde{Y}} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p\times p_2})$ *siten että (oikeanpuoleinen) Bezoutin identiteetti*

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{X}} & \hat{\tilde{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F} \\ \hat{G} \end{bmatrix} = I_{m\times m}$$

toteutuu.

(ii) Analogisesti, $\hat{\tilde{F}}$ *ja* $\hat{\tilde{G}}$ *ovat vasemmalta jaottomia ("yli* RH^∞*:n") jos ja vain jos on olemassa* RH^∞*-siirtofunktiot* $\hat{X}$ *ja* $\hat{Y}$ *siten että (vasemmanpuoleinen) Bezoutin identiteetti*

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{F}} & \hat{\tilde{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = I_{p\times p}$$

toteutuu

Todistus. Todistus väitteelle (i) on Vidyasagarin kirjassa korollaarina Lemmaa 46 vastaavalle tulokselle. □

Skalaarisen rationaalifunktion esitys osamääränä jaottomista skalaaripolynomeista voidaan yleistää seuraavasti:

Määritelmä 48. *Olkoon $\hat{G} \in RL^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p\times m})$ mielivaltainen aito (siis jonkin lin. systeemin) siirtofunktio.*

(i) *Funktion $\hat{G}$ oikea jaoton faktorisointi on siirtofunktion esitys muodossa $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$, jossa funktio $s \mapsto \det \hat{M}(s)$ ei häviä identtisesti, sekä $\hat{N}, \hat{M} \in RH^\infty$ ovat oikealta jaottomia ja dimensioiltaan sopivia.*

(ii) *Funktion $\hat{G}$ vasen jaoton faktorisointi on siirtofunktion esitys muodossa $\hat{G} = \hat{\tilde{M}}^{-1}\hat{\tilde{N}}$, jossa funktio $s \mapsto \det \hat{\tilde{M}}(s)$ ei häviä identtisesti, sekä $\hat{\tilde{N}}, \hat{\tilde{M}} \in RH^\infty$ ovat oikealta jaottomia ja dimensioiltaan sopivia.*

Jos neliömatriisiarvoinen $\hat{M} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{m\times m})$ on sellainen, että myös $\hat{M}^{-1} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{m\times m})$, sanotaan että $\hat{M}$ on *rationaalinen ulkofunktio.* Voidaan osoittaa, että $\hat{M}$ on ulkofunktio jos ja vain jos sen determinantti $s \mapsto \det \hat{M}(s)$ on kompleksiarvoinen ulkofunktio.

Tehtävä 49. *Osoita edellinen itse rationaalifunktioille.*

Jokaisella äärellisdimensioisen systeemin (aidolla, rationaalisella) siirtofunktiolla $\hat{G} \in RL^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p\times m})$ olemassa sekä oikea että vasen jaoton faktorisointi, jotka ovat vielä lisäksi kytkettyjä toisiinsa erityisellä tavalla.

Lemma 50. *Olkoon $\hat{G} \in RL^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p\times m})$ mielivaltainen lineaarisen systeemin siirtofunktio. Tällöin on olemassa kahdeksan dimensioiltaan yhteensopivaa RH^∞-funktiota $\hat{N}$, $\hat{M}$, $\hat{\tilde{N}}$, $\hat{\tilde{M}}$, $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{\tilde{X}}$ ja $\hat{\tilde{Y}}$, joille*

$$
\begin{cases} \hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1} = \hat{\tilde{M}}^{-1}\hat{\tilde{N}}, \\ \begin{bmatrix} \hat{\tilde{X}} & -\hat{\tilde{Y}} \\ -\hat{\tilde{N}} & \hat{\tilde{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{Y} \\ \hat{N} & \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{22}
$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että Määritelmän 48 jokin jaoton oikea faktorisointi $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ on olemassa. Kirjoitetaan funktion $\hat{G}$ rationaaliset ja kompleksiarvoiset matriisielementtifunktiot $g_{j,k}$ faktorisointeina $g_{j,k} = n_{j,k}/m_{j,k}$, jossa $n_{j,k}, m_{j,k} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$. Olkoon $m \in RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$ kaikkien nimittäjien $q_{j,k}$ (pienin) yhteinen jaettava pääideaalialueessa $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$, joka on olemassa Proposition 37 perusteella. Tämä tarkoittaa että rationaalifunktio $m/q_{j,k}$ on joukossa $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$ kaikilla j,k, ja jos jokin toinen m' toteuttaa saman ehdon, niin silloin $m|m'$ $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C})$:ssa. Funktion m nollakohdat ovat (kertalukuineen) leikkaus kaikkien funktioiden $q_{j,k}$ nollakohdista oikeassa puolitasossa $\mathbf{C}_+$.

Määrittelemällä kaikilla paitsi äärellisen monella $s \in \mathbf{C}$

$$\hat{M}_1(s) := m(s) I_{m\times m}, \quad \hat{N}_1(s) := \hat{G}(s)\hat{M}_1(s)$$

saadaan eräs oikea faktorisointi $\hat{G}$:lle, mutta se ei ehkä ole jaoton. Lemman 46 perusteella on olemassa $\hat{E} \in s.y.o.t.(\hat{N}, \hat{M})$, ja voidaan siis kirjoittaa $\hat{M}_1 = \hat{M}\hat{E}$ sekä $\hat{N}_1 = \hat{N}\hat{E}$ eräille $\hat{M} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{m\times m})$ ja $\hat{N} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$. Tämä on oikealta jaoton faktorisointi, koska jos funktioilta $\hat{M}$ ja $\hat{N}$ olisi yhteinen oikea tekijä (ei yksikkö), niin silloin $\hat{E}$ ei olisi yhteisistä tekijöistä suurin.

Symmetrisesti (matriisitransponoinnin avulla) osoitetaan, että myös vasen jaoton faktorisointi $\hat{G} = \hat{\hat{M}}^{-1}\hat{\hat{N}}$ on olemassa.

Koska $\hat{M}, \hat{N}$ ovat oikealta jaottomia ja $\hat{\hat{M}}, \hat{\hat{N}}$ puolestaan vasemmalta, on olemassa Lemman 47 perusteella funktiot RH^∞:ssa joille pätee

$$\hat{\hat{X}}\hat{M} - \hat{\hat{Y}}\hat{N} = I_{m\times m}, \quad -\hat{\hat{N}}\hat{Y}_1 + \hat{\hat{M}}\hat{X}_1 = I_{p\times p}.$$

Näillä siirtofunktiolla saadaan jälkimmäinen yhtälöistä (22) melkein toteutumaan. Nimittäin

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}} & \hat{\hat{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{Y}_1 \\ \hat{N} & \hat{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & \Delta \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix} \tag{23}$$

jossa $\Delta := \hat{\hat{X}}\hat{Y}_1 - \hat{\hat{Y}}\hat{X}_1 \in RH^\infty$. Koska kaikilla $s \in C$ pätee

$$\begin{bmatrix} I_{m\times m} & \Delta(s) \\ 0 & I_{m\times m} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & -\Delta(s) \\ 0 & I_{m\times m} \end{bmatrix},$$

seuraa että $s \mapsto \begin{bmatrix} I_{m\times m} & \Delta(s) \\ 0 & I_{m\times m} \end{bmatrix}$ on rationaalinen ulkofunktio.

Ottamalla determinantti yhtälön (23) molemmista puolista, ja huomioimalla että vasemmanpuoleiset lohkomatriisit ovat $m \times m$-matriisiarvoisia RH^∞-funktioita, todetaan että molemmat näistä faktoreista ovat ulkofunktioita. Saadaan

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}} & \hat{\hat{M}}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{Y}_1 \\ \hat{N} & \hat{X}_1\end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m\times m} & -\Delta \\ 0 & I_{p\times p}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}} & \hat{\hat{M}}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{M} & -\hat{M}\Delta + \hat{Y}_1 \\ \hat{N} & -\hat{N}\Delta + \hat{X}_1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

joka todistaa kaavan (22) asettamalla $\hat{Y} := -\hat{M}\Delta + \hat{Y}_1$ ja $\hat{X} := -\hat{N}\Delta + \hat{X}_1$. $\square$

Määritelmä 51. *Yhtälön (22) antama siirtofunktion $\hat{G}$ faktorisointi on nimeltään kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi (doubly coprime factorization).*

Yllä oleva todistus on modifioitu Vidyasagarin kirjasta Control System Synthesis, sivuilta 75 ja 79. Francisin kirjassa on (osittain vajavainen) todistus, jossa siirtofunktio $\hat{G}$ ja sen kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi on annettu $\hat{G}$:n reaalisaation $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D\end{smallmatrix}\right]$ avulla. Tällöin faktoreille voidaan antaa eksplisiittiset kaavat systeemin generoivien operaattoreiden avulla, olettaen että systeemin Σ puoliryhmän generaattori A osataan stabiloida nk. tilatakaisinkytkennällä

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = Fx(t) + v(t), \quad t \geq 0.\end{cases}$$

Tarkemmin, faktorisointien löytäminen tila-avaruusmuodossa edellyttää annetulle matriisiparille (A, B) sellaisen *tilatakaisinkytkentämatriisin* F löytämistä (tai edes sellaisen matriisin F olemassaolon osoittamista), jolle $\sigma(A+BF) \subset \mathbf{C}_-$. Tämä ei ole lainkaan triviaali tehtävä, ja silloin kun se ratkeaa, sanotaan parin (A, B) olevan *stabiloituva*. Onneksi mielivaltaiselle aidolle rationaalifunktiolle $\hat{G}$ voidaan löytää (esim. minimaalinen) reaalisaatio, joka toteuttaa tämän ehdon.

(**5. luento v.2002 "muka" päättyi tähän, mutta eihän tietenkään voinut käydä renkaiden teoriaa läpi edes siinä laajuudessa kuin tässä on sitä tangeerattu.**)

Kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin avulla saadaan vielä yksi karakterisaatio siirtofunktioiden vasemmalle jaottomuudelle.

Korollaari 52. *(i) Olkoon* $\hat{N} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{p\times m})$ *ja* $\hat{M} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{m\times m})$ *mielivaltaisia, ja oletetaan että* $\det \hat{M}$ *ei häviä identtisesti. Tällöin* $\hat{N}$ *ja* $\hat{M}$ *ovat oikealta jaottomia jos ja vain jos on olemassa siirtofunktiot* $\hat{U} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{m\times p})$ *ja* $\hat{V} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{p\times p})$ *siten että*

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{U} \\ \hat{N} & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{(m+p)\times(m+p)}).$$

(ii) Duaalisesti, oletetaan että $\hat{\tilde{M}} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{p\times p})$, $\hat{\tilde{N}} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{p\times m})$ *ovat mielivaltaisia ja* $\det \hat{M}$ *ei häviä identtisesti. Tällöin* $\hat{\tilde{M}}$ *ja* $\hat{\tilde{N}}$ *ovat vasemmalta jaottomia, jos ja vain jos on olemassa siirtofunktiot* $\hat{U} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{m\times p})$ *ja* $\hat{V} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{p\times p})$ *siten että*

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{M}} & \hat{\tilde{N}} \\ \hat{\tilde{U}} & \hat{\tilde{V}} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbf{C}_+; C^{(m+p)\times(m+p)}).$$

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin olemassaolosta funktiolle $\hat{G} := \hat{N}\hat{M}^{-1}$. □

Francisin kirjassa on annettu todistus nk. Smithin kanonisem muodon avulla, jolloin toisen faktoreista ei tarvitse edes olla neliömatriisiarvoinen. Tätä lisäyleisyyttä ei kuitenkaan tunnuta missään tarvittavan.

(**Olisin erityisen kiitollinen jos joku lukijoista kävisi ylläolevan tekstin läpi pikkutarkasti.**)