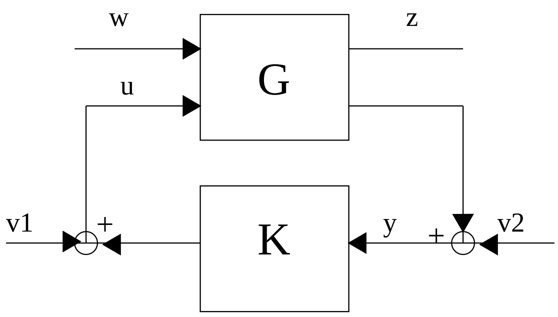
5 Reduktio standardiongelmaan

Tässä luvussa määritellään nk. *mallinsovitusongelma*, joka voidaan nähdä erikoistapauksina luvussa 1 määritellystä standardiongelmasta. Standardiongelma voidaan käänäen palauttaa mallinseurantaongelmaksi, joka on itseasiassa hieman yksinkertaisempi tehtävä. Aloitamme kuitenkin tarkastelemalla takaisinkytkentäkaavioiden tulkintoja. Toteamme että kaaviot voidaan yhtä hyvin tulkita niin aikatasossa kuin taajuustasossakin.

5.1 Takaisinkytkentäkaavioiden semantiikasta

Jo ihan näiden luentojen alkupuolella, ensimmäisessä luvussa, olemme kuvanneet pääpiirteissään nk. standardi- eli nelilohko-ongelman, jota kuvataan takaisinkytkentädiagrammilla



jossa operaattori G on lohkottu muotoon $\left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ siten, että takaisinkytkentä-
kaavion summausliitokset ovat järkeviä. Purkamalla kaavio algebrallisiksi yhtälöiksi, saadaan (kuten aikaisemmin on jo esitettykin)

$$\begin{bmatrix} I & -G_{12} & 0 \\ 0 & I & -K \\ 0 & -G_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ G_{21} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Näihin algebrallisiin yhtälöihin päätyminen ei juurikaan edellytä takaisinkytkentäkaavion kuvaaman asetelman syvällistä “semanttistaa analyysiä“, vaan lähinnä selvää järkeä. Itseasiassa, nämä kaaviot voidaan tulkita useilla eri tavoilla, jotka johtavat lopulta olennaisesti samoihin “operaattoriteorian" tehtäviin. Aina on riittää seurata johdonmukaisesti seuraavaa "alkuarvotehtävätulkintaa".

Oletamme että jokainen kaavioissa esiintyvä laatikko on esitettävissä jonkin (ehkä tuntemattoman) äärellisulotteisen lineaarisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ I/O-kuvauksen Toeplitz-operaattorina, jota on edellä merkitty symbolilla G_+. Tällöin jokainen takaisinkytkentäkaavion elementti on lineaarinen tila-avaruussysteemi, joka aloittaa toimintansa alkuhetkellä $t = 0$, alkutilasta $x(0) = 0$. Signalien energiasisältöja mittaamme L^2 -tyyppisillä normeilla.

Oletamme edelleen, että kaikki ulkoiset syötteet ovat määriteltyjä kaikilla positiivisilla ajanhetkillä $t \geq 0$, sekä Laplace-muuntuvia ja erityisesti jatkuvia (tämä oletus vain laiskuudestamme johtuen). Olemme todistaneet Propositiossa 13, että äärellisdimensioiset systeemit eivät kuvaa Laplace-muuntuvia signaaleja ei-Laplace-muuntuviksi. Niinpä huomaamme, että kaikki kaavion sisäiset signaalit ja tila-trajektorit ovat niin ikään Laplace-muuntuvia — olettaen että takaisinkytkennöissä ei tapahdu mitään patologista. Nämä patologiat ovat analogisia Proposition 13 käänteisen suunnan lisävaatimukselle (että läpisyöttömatriisi D on kääntyvä), ja sellaiset patologiat suljetaan erikseen pois tietyillä lisävaaatimuksilla. Ei-patologiset takaisinkytkentäloopit ovat nk. *hyvinasetettuja (well-posed)*.

Tämä tulkinta antaa jokaiselle lohkokaaviolle fysikaalisesti ymmärrettävän ja matemattisesti solidin tulkinnan. Kaikki esiintyvät signaalit voidaan korvata Laplace-muunnoksillaan, ja kaikki esiintyvät laatikot (eli Toeplitz-operattorit muotoa G_+) vastaavilla rationaalisilla siirtofunktioilla[9]. Tästä on meille käytännön laskujen kannalta huomattavasti apua, koska rationaalisten siirtofunktioiden käsitteleminen on periaatteessa hyvin yksinkertaista. Lisäksi siirtofunktioiden nollakohtien ja napojen avulla voidaan muotoilla stabiilisuusehtoja.

5.2 Stabilointi- ja standardiongelma taajuustasossa

Laplace-muuntamalla yhtälö 17 saadaan ekvivalentisti (mikäli kaikki signaalit ovat Laplace-muuntuvia, ja lohkot ovat joittenkin systeemien Toeplitz-

[9] Insinöörit eivät usein teekään kovin tarkka eroa aika- ja taajuustasokäsitteiden välillä.

operaattoreita)

$$\text{(18)} \qquad \begin{bmatrix} I & -\hat{G}_{12}(s) & 0 \\ 0 & I & -\hat{K}(s) \\ 0 & -\hat{G}_{22}(s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}(s) \\ \hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hat{G}_{21}(s) & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}(s) \\ \hat{v}_1(s) \\ \hat{v}_2(s) \end{bmatrix}$$

kaikilla paitsi äärellisen monella $s \in \mathbf{C}_+$. Erityisesti, mikäli siirtofunktio $\hat{G}_{22}$ on täysin aito ("strictly proper", eli $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$), on yhtälön (18) vasemmalla puolella määritellyllä lohkomatriisilla käänteismatriisi kun $|s|$ on riittävän iso. Vaatimus $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$ takaa siis, että takaisinkytkentälooppi on hyvinasetettu, ja siirtofunktio $[\hat{w}(s) \quad \hat{v}_1(s) \quad \hat{v}_2(s)]^T \mapsto \hat{z}(s) \quad \hat{u}(s) \quad \hat{y}(s)$ on selvästi muotoa

$$\text{(19)} \qquad \hat{H}_{G,K}(s) := \begin{bmatrix} I & -\hat{G}_{12}(s) & 0 \\ 0 & I & -\hat{K}(s) \\ 0 & -\hat{G}_{22}(s) & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hat{G}_{21}(s) & 0 & I \end{bmatrix},$$

Osoittautuu, että nimenomaan siirtofunktion nurkka $\hat{G}_{22}$ vaatii nelilohko-ongelman tapauksessa eritystä huomiota.

(**4. luento v. 2002 päättyi tähän**)

Määritelmän 6 stabilointitehtävä voidaan nyt lausua taajuustasossa, rationaalisten siirtofunktioiden avulla seuraavasti:

Propositio 32. *Olkoon $\hat{G}$ rationaalinen funktio, joka on hajoteltu 2×2 lohkomatriisiksi $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{smallmatrix}\right]$. Oletetaan lisäksi, että $\hat{G}_{22}$ on täysin aito. Tällöin määritelmän 6 stabilointitehtävän ratkaisu on ekvivalentti stabiloivien kontrollereitten joukon* [10]

$$S_G := \{\hat{K} \in RL^\infty \text{ on aito} \quad | \quad \hat{H}_{G,K} \in RH^\infty\}$$

parametrisoinnin kanssa.

Tarvitsemme siis lausekkeen siirtofunktiolle $\hat{H}_{G,K}$. Mikäli itse asiassa $\hat{G}_{22}$ on identtisesti nolla, on yhtälön (19) vasemmanpuoleisen tekijän inverssi helppo

[10] Tässä luonnollisesti vaaditaan funktiolta $\hat{K}$, että yhtälön (19) siirtofunktio $\hat{H}_{G,K}$ on signaalien dimensioiden puolesta ylipäätään hyvin määritelty.

laskea (ks. tehtävä 5).

$$\hat{H}_{G,K}(s) = \begin{bmatrix} I & \hat{G}_{12}(s) & G_{12}(s)K(s) \\ 0 & I & \hat{K}(s) \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hat{G}_{21}(s) & 0 & I \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) + \hat{G}_{12}(s)K(s)G_{21}(s) & \hat{G}_{12}(s) & G_{12}(s)K(s) \\ K(s)G_{21}(s) & I & \hat{K}(s) \\ \hat{G}_{21}(s) & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Saamme suoraan varsin triviaalin ratkaisun stabilointitehtävälle tässä erikoistapauksessa.

Propositio 33. *Määritelköön $G = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ ja K standardiongelman takaisinkytkentäkaavion. Oletetaan että kaikki systeemit ovat äärellisdimensioisia, ja että $G_{22} = 0$. Tällöin K stabiloi G:n jos ja vain jos kaikki (Toeplitz-) operaattorit G_{11}, G_{12}, G_{21} ja K ovat I/O-stabiileja jos ja vain jos siirtofunktioiden $\hat{G}$ ja $\hat{K}$ kaikki navat ovat joukossa $\mathbf{C}_+$.*

Stabilointitehtävä voidaan siis ratkaista ainoastaan, jos systeemi G on alunperin stabiili, mikäli $G_{22} = 0$. Tässä tapauksessa stabiloivia säätäjiä ovat kaikki stabiilit K, jotka signaalien dimensioiden puolesta ovat ylipäätään kytkettävissä haluttuun takaisinkytkentämuotoon. Huomaamme siis, että yleisemmässä ja epätriviaalissa tapauksessa valittavan kontrollerin K täytyy tehdä jotain olennaista nimenomaan lohkolle G_{22}.

Propositionssa 32 annetun yleisemmän tehtävän ratkaisu perustuu olennaisesti seuraavalle:

Tehtävä 34. *Olettaen että siirtofunktio $\hat{G}_{22}$ on täysin aito, laske lauseke rationaalifunktiolle $\hat{H}_{G,K}(s)$. Käytä hyväksi matriisin inverssin häiriöargumenttia ja kaavaa tapaukselle $G_{22} = 0$. Voitko heikentää vaatimusta, että $\hat{G}_{22}$ tulee olla täysin aito?*

Standarditehtävä voidaan niin ikään saattaa taajuustasomuotoon.

Propositio 35. *Olkoon $\hat{G}$ rationaalinen funktio, joka on hajoteltu 2×2 lohkomatriisiksi $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{smallmatrix}\right]$. Oletetaan että $\hat{G}_{22}$ on täysin aito. Merkitään Proposition 32 stabiloivien kontrollereitten joukkoa*

$$S_G := \{\hat{K} \quad \textit{rationaalinen} \quad | \quad \hat{H}_{G,K} \in RH^\infty\}.$$

(i) Standardiongelman ratkaisu (rationaalimuodossaan) on ekvivalenttia niiden (rationaali)funktioiden $K \in S_G$ löytämiseen, joille siirtofunktio

$$\hat{G}_{\hat{K}} := \hat{G}_{11} + \hat{G}_{12} \left(I - \hat{G}_{22}\hat{K} \right)^{-1} \hat{G}_{21} \in RH^{\infty},$$

toteuttaa

$$||\hat{G}_{\hat{K}}|| = \inf_{\hat{K}' \in S_K} ||\hat{G}_{\hat{K}'}||.$$

(ii) Suboptimaalisen standardiongelman ratkaisu (rationaalimuodossaan) on ekvivalenttia niiden (rationaali)funktioiden $K \in S_G$ joukon parametrisointiin, joille siirtofunktio $G_{\hat{K}}$ toteuttaa

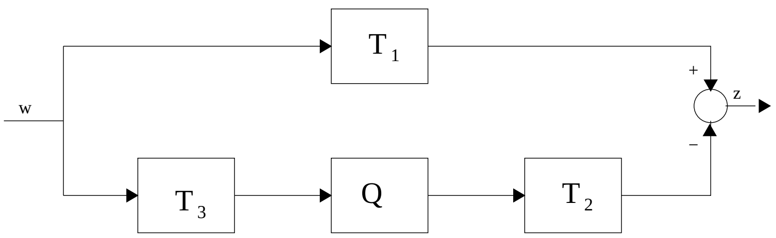
$$||\hat{G}_{\hat{K}}|| < \gamma,$$

annetulla $\gamma > 0$.

Tähän ongelmaan palataan myöhemmin.

5.3 Mallinsovitusongelma

Seuraavassa kaaviossa määritellään nk. *mallinsovitusongelma.*



Koska aikatason ja taajuustason esityksen ovat edellä todettu ekvivalentteiksi, formuloimme tehtävän suoraan siirtofunktioiden avulla.

Siirtofunktio $\hat{T}_1 \in RH^{\infty}$ on ennalta annettu "malli-siirtofunktio", jota on tarkoitus lähestyä tulolla $\hat{T}_2\hat{Q}\hat{T}_3$. Sekä $\hat{T}_2 \in RH^{\infty}$ että $\hat{T}_3 \in RH^{\infty}$ on annettuja "suunnittelurajoituksia", ja "kontrolleri" $\hat{Q}$ tulee valita siten, että

$$M_{\hat{Q}} := \sup \{ \, ||\hat{z}||_2 \quad | \quad w \in H^2, ||\hat{z}||_2 \leq 1 \}$$

minimoituu yllä olevan kaavion mukaisessa kytkennässä. Lisäksi vaaditaan, että hyväksyttävä kontrolleri on stabiili, eli $\hat{K} \in RH^\infty$.

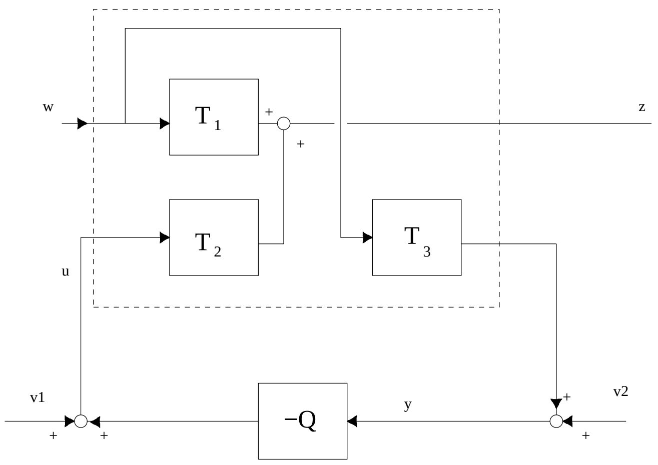
Selvästi kuvauksen $\hat{w} \mapsto \hat{z}$ siirtofunktio on muotoa $\hat{T}_{\hat{Q}} := \hat{T}_1 - \hat{T}_2\hat{Q}\hat{T}_3$, ja $M_{\hat{Q}} = ||\hat{T}_{\hat{Q}}||_\infty$. Tehtävä voidaan luonnollisesti antaa suboptimaalisessa muodossa, jolloin annetulle vakiolle $\gamma > 0$ halutaan parametrisoida joukko

$$\{\hat{Q} \in RH^\infty \quad | \quad M_{\hat{Q}} < \gamma\}.$$

Kirjoittamalla

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{T}_1 & \hat{T}_2 \\ \hat{T}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{K} = -\hat{Q},$$

huomataan viimeistään kaaviosta



että mallinsovitusongelma on erikoistapaus standardiongelmasta, kunhan ulkoisia häiriösignaaleja v_1 ja v_2 lisäillään. Koska erityisesti $\hat{G}_{22} = 0$, voimme käyttää Propositiota 33 edeltävää kaavaa vastaavalle siirtofunktiolle $\hat{H}_{G,K}$. Kääntäen, jos $\hat{G}_{22} = 0$, voidaan nelilohkotehtävä saattaa välittömästi yllä olevalla tulkinnalla mallinsovitusongelmaksi. Koska $\hat{G}$ ja $\hat{K}$ on a priori vaadittu stabiileiksi, seuraa että stabilointivaatimus $\hat{H}_{G,K}$:lle on lähes triviaalisti täytetty Proposition 33 nojalla.