4 Laplace- ja Fourier-muunnostekniikoista

4.1 Laplace-muunnos ja siirtofunktiot

On tapana sanoa, että yhtälön (8) määrittelemä lineaarinen dynaaminen systeemi on kirjoitettu *aikatasossa* (time domain). Tällä viitataan vain siihen, että yhtälö on parametrisoitu aikaparametrilla t, ja että annetussa rakenteessa mikään ei viittaa systeemin käytökseen silloin kun siihen syötetään sisään signaaleita u joilla on jaksollinen käytös ajassa. Systeemiä $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ voidaan kuvata ekvivalentisti myös nk. *taajuustasossa* (frequency domain). Tällöin systeemi Σ kirjoitetaan muotoon, jossa sen käyttäytyminen eri taajuuksisilla syötteillä on välittömästi nähtävissä. Taajuustasona ymmärretään kompleksilukualueen $\mathbf{C}$ osajoukkoja, yleisimmin reaaliakselin suunnassa siirrettyjä kopioita oikeasta puolitasosta $\mathbf{C}_+$. Taajuustason elementtejä, jotka siis karkeasti vastaavat eri "taajuuksia", merkitään yleensä kompleksimuuttujalla s. Aikatason ja taajuustason välillä liikutaan *Laplace-muunnoksen* avulla.

Määritelmä 12. *Mikäli $u \in C(\mathbf{R}_+; C^m)$ toteuttaa joillain vakioilla $0 \le \alpha < \infty$, $M < \infty$ ehdon*

$$e^{-\alpha t}||u(t)||_{\mathbf{C}^m} \le M \quad \textit{kaikilla} \quad t \ge 0 \tag{10}$$

sanotaan, että u on Laplace-muuntuva. Jokaiselle Laplace-muuntuvalle u määritellään Laplace-muunnos funktiona

$$\hat{u}(s) := \int_0^\infty e^{-st} u(t)\, dt \quad \textit{kaikilla} \quad \Re s > \alpha,$$

jossa α toteuttaa estimaatin (10).

Voidaan osoittaa lyhyellä argumentilla, että $\hat{u}$ on argumenttinsa s analyyttinen funktio kaikilla s joilla $\Re s$ on riittävän iso. Jos merkitään yhtälön (10) vakioiden α alarajaa

$$\omega_u := \inf \{\alpha \quad | \quad \sup_{t \ge 0} e^{-\alpha t}||u(t)||_{\mathbf{C}^m} < \infty\},$$

huomataan että $\hat{u}$ on analyyttinen kaikilla s, $\Re s > \omega_u$. Kuvausta $u \mapsto \hat{u}$ (joka on selvästi lineaarinen) merkitään yleensä $\hat{u} = \mathcal{L}\{u\}$. Voidaan osoittaa, että funktion u Laplace-muunnos on nollafunktio ja vain jos u on niin ikään nollafunktio. Mikäli $u \in C^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$ ja sekä u ja sen derivaatta u' ovat Laplace-muuntuvia, saadaan osittaisintegroimalla

$$\hat{u'}(s) = \int_0^\infty e^{-st} u'(t)\, dt = \Big|_0^\infty e^{-st} u(t) + s \int_0^\infty e^{-st} u(t)\, dt = s\hat{u}(s) - u(0), \tag{11}$$

jokaisella s joka toteuttaa $\Re s > \max(\omega_u, \omega_{u'})$. Edellisen kaavan sijoitustermi äärettömyydessä havaitaan häviävän, kunhan raja-arvoa otettaessa käytetään oletusta $\Re s > \omega_u$. Itse asiassa havaitaan kaavasta (11), että $\hat{u}$ ja $\hat{u}'$ voidaan molemmat jatkaa analyyttisesti joukkoon $\{s \quad | \quad \Re s > \min(\omega_u, \omega_{u'})\}$. Tästä ei kuitenkaan seuraa että molemmat funktiot u, u' kasvaisivat olennaisesti samaa eksponentiaalista vauhtia, vaan derivaatta voi kasvaa huomattavasti nopeammin. Esimerkkinä[6] tästä on funktio $u(t) = e^t \sin e^t$, jonka derivaatta kasvaa kuin e^{2t}. Tämä ilmiö ei esiinny diskreetin ajan tarkasteluissa, joissa potenssisarjan ja sen derivaatan suppenemissäteet ovat yhtä suuria.

Laplace-muuntamalla differentiaaliyhtälö (8) saadaan

Propositio 13. *Olkoon $G_+ : C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m) \to C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^p)$ äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ Toeplitz-operaattori. Nimetään seuraavat väitteet:*

(i) Funktio $u \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$ Laplace-muuntuva, ja $y := G_+ u$, ja

(ii) funktio $y \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^p)$, on Laplace-muuntuva, ja toteuttaa $y := G_+ u$ eräällä $u \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$.

Tällöin (i) $\Rightarrow$ (ii), ja

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s) \quad \textit{kaikilla} \quad s \in \mathbf{C}, \Re s > \max(\omega_u, \omega_G)$$

jossa $\hat{G}(s) := D + C(s-A)^{-1}B$ ja $\omega_G := \max\{\Re s \quad | \quad s \in \sigma(A)\}$. Kääntäen, jos lisäksi D on neliömatriisi ja kääntyvä, niin (ii) $\Rightarrow$ (i).

Todistus. Todistetaan implikaatio (i) $\Rightarrow$ (ii) pääpiirteissään. Olkoon u Laplace-muuntuva, jolloin on olemassa vakiot $\alpha \geq 0$ ja $M < \infty$ siten että $||u(t)||_{\mathbf{C}^m} \leq$

[6] Esimerkin antoi minulle A. Perämäki, 2002

$Me^{\alpha t}$ kaikilla $t \geq 0$. Vakioiden variointikaavan (9) integraalitermiä voidaan estimoida

$$
\begin{aligned}
&|| \int_0^t e^{(t-q)A} Bu(q)\, dq ||_{\mathbf{C}^n} \leq \int_0^t e^{(t-q)\,||A||} ||B||\, M e^{\alpha q}\, dq \\
&= M\,||B||\, e^{t\,||A||} \cdot \int_0^t e^{(||A||+\alpha)q}\, dq = \frac{M\,||B||\, e^{t\,||A||}}{||A||+\alpha} \left(e^{(||A||+\alpha)t} - 1 \right) \\
&\leq \frac{M\,||B||\, e^{t\,(2||A||+\alpha)}}{||A||+\alpha},
\end{aligned}
$$

josta seuraa että trajektori x on niin ikään Laplace-muuntuva. Samoin on sen derivaatta x', koska se toteuttaa differentiaaliyhtälön $x' = Ax + Bu$, jossa yhtälön oikea puoli jo tiedetään Laplace-muuntuvaksi. Laplace-muuntamalla yhtälön molemmat puolet ja käyttämällä derivaatan muunnossääntöä (11) saadaan

$$\hat{x}(s) = (s - A)^{-1} (x_0 + B\hat{u}(s))$$

ensin jossain oikeassa puolitasossa, ja sen jälkeen analyyttisesti jatkamalla joukossa $\{s \in \mathbf{C} \mid \Re s > \max(\omega_u, \omega_G)\}$. Koska $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ kaikilla $t \geq 0$, saadaan välittömästi

$$\hat{y}(s) = C(s - A)^{-1} (x_0 + B\hat{u}(s)) + D\hat{u}(s).$$

Valitsemalla $x_0 = 0$, toteutuu $y = G_+ u$, jossa tapauksessa $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$.

Käänteisen suunnan todistus perustuu siihen, että jos D^{-1} on olemassa, niin silloin funktio $s \mapsto \hat{G}(s)^{-1}$ on erään äärellisdimensioisen systeemin siirtofunktio. $\square$

Uusille lapsukaisille tarvitaan uusia nimiä, ja niinpä pidetään nyt pienet ristiäiset.

Määritelmä 14. *Olkoon $\hat{G}$ äärellisdimensioinen systeemi $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$.*

(i) Analyyttistä $p \times m$-matriisiarvoista funktiota $\hat{G}(s) := D + C(s - A)^{-1}B$ kutsutaan systeemin Σ siirtofunktioksi.

(ii) Niitä pisteitä $p \in \mathbf{C}$ joiden jokaisessa ympäristössä $\hat{G}(s)$ on rajoittamaton, kutsutaan systeemin navoiksi.

(iii) Siirtofunktion (ja myös systeemin Σ) McMillan-asteeksi kutsutaan napojen lukumäärää.

(iv) Siirtofunktion geneerinen rangi on kokonaisluku

$$\nu_G := \max_{s \in \mathbf{C} \setminus \{navat\}} \operatorname{rank} \hat{G}(s),$$

ja nolliksi kutsutaan niitä $z \in \mathbf{C}$ joissa $\operatorname{rank} \hat{G}(z) < \nu_G$.

(v) Mikäli $\lim_{|s| \to \infty} \hat{G}(s) = D = 0$, sanotaan että siirtofunktio on täysin aito (strictly proper).

Insinöörien kielenkäytössä puhutaan joskus siirtofunktioista, jotka eivät ole minkään systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktioita, vaan pelkästään analyyttisiä (yleensä jopa rationaalisia) funktioita jossain oikeassa puolitasossa. Äärellisdimensioisen systeemin Σ siirtofunktio toteuttaa aina

$$\lim_{|s| \to \infty} ||\hat{G}(s)|| = ||D|| < \infty,$$

ja tällaista rationaalista siirtofunktiota kutsutaan *aidoksi*. Reaalisaatioteoriassa osoitetaan konstruktiivisesti, että jokainen aito rationaalinen funktio on erään äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktio. Signaalin derivoimisoperaattoria $D = d/dt$ vastaa (olennaisesti) taajuustasossa kertolasku muuttujalla s, joten derivoimisoperaattorin "siirtofunktio" on siis $\hat{D}(s) = s$. Derivointia ei voi siis erityisesti erittää minkään äärellisdimensioisen systeemin avulla. Tämä on itse asiassa selvää jo Proposition 7 perusteella, koska äärellisdimensioinen systeemi kuvaa jatkuvat syötteet jatkuville vasteille. Derivointi puolestaan haluaa sisäänsä (ainakin kerran) derivoituvia funktioita, joilta se riistää sileyttä tasan yhden derivaatan verran.

Äärellisulotteisen systeemin siirtofunktiolla on tärkeä kompleksisuusominaisuus:

Propositio 15. *Äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktion matriisielementit ovat muuttujan s rationaalisia funktioita.*

Todistus. Kirjoita A Jordan-muotoonsa, ja laske sen avulla ensin resolventti $(s - A)^{-1}$. Tämä voidaan tehdä äärellisellä määrällä matriisien tuloja ja summia, Jordan-lohkojen ja Neumann-sarjan avulla. Seuraa, että resolventtifunktion $s \mapsto (s - A)^{-1}$ jokainen matriisielementti on s:n rationaalinen funktio, koska matriisioperaatiot eivät vie matriisielementtejä ulos rationaalisten funktioiden luokasta. Sama kommentti pätee myös funktiolle $C(s - A)^{-1}B$, ja itse siirtofunktiolle. $\square$

Sellaista matriisiarvoista funktiota $G(\cdot)$, jonka jokainen elementti on rationaalinen kompleksiarvoinen funktio, kutsutaan *rationaaliseksi matriisifunktioksi*. Äärellisdimensioisen systeemin siirtofunktiot ovat siis tällaisia funktioita. Enemmänkin voidaan sanoa.

Korollaari 16. *Olkoon $\hat{G}$ analyyttinen funktio jossain vasemmassa puolitasossa. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) $\hat{G}$ on äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktio, ja

(ii) $\hat{G}$ on rationaalinen funktio, jolle $\lim_{|s|\to\infty} ||\hat{G}(s)||_{p\times m} < \infty$.

Todistus. Implikaatio (i) $\Rightarrow$ (ii) seuraa suoraan Propositiosta 15. Käänteinen suunta on reaalisaatioteorian perustehtävä, johon palataan myöhemmin. $\square$

Olemme edellä määritelleet äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktion $\hat{G}(s)$ vertaamalla syötteiden u ja vasteiden y Laplace-muunnoksia keskenään. Vaikka siirtofunktio on määritelty systeemin Σ generoivien operaattoreiden kautta, se riippuu kuitenkin ainoastaan systeemin I/O-kuvauksesta G tai, oikeammin, vain sen Toeplitz-operaattorista G_+. Huomaa, että Proposition 13 todistus perustuu tekniikaltaan sille, että generoivat operaattorit A, B, C ja D ovat matriiseja. Toeplitz-operaattorilla G_+ on tästä seurauksena se erikoisominaisuus, että se kuvaa Laplace-muuntuvan syötteen u Laplace-muuntuvaksi vasteeksi y. Yleiselle lineaariselle, aika- ja translaatioinvariantille, kausaaliselle mustalle laatikolle G tämän ei tarvitse olla totta.

Tehtävä 17. *Olkoon V kääntyvä $n \times n$-neliömatriisi ja $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ äärellisdimensioisen systeemi kuten edellä. Osoita että $\Sigma_V = \left[\begin{smallmatrix} V^{-1}AV & V^{-1}B \\ CV & D \end{smallmatrix}\right]$ on niin ikään äärellisulotteinen systeemi, ja että systeemien Σ ja Σ_V siirtofunktiot ovat samat. Osoita lisäksi että Σ ja Σ_V ovat yhtä aikaa minimaalisia.*

4.2 Impulssivaste ja konvoluutio

Olettakaamme, että tiedämme mustan laatikon sisällä olevan lineaarinen, äärellisdimensioinen systeemi $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, mutta generoivat operaattorit A, B, C ja D eivät ole tiedossa sen enempää kuin siirtofunktio $\hat{G}(s)$. Tehtävän (17) perusteella tiedämme, että Σ:n I/O-kuvaus G ei määrää yksikäsittteisesti systeemiä Σ edes siinä tapauksessa, että sen tiedetään *a priori* olevan minimaalinen. Sen sijaan osoittautuu, että siirtofunktio $\hat{G}(s)$ määräytyy G:stä yksikäsitteisesti. Tämä on itsestään selvää siinä tapauksessa, että signaalit u ja y ovat skalaariarvoisia. Tällöin nimittäin $\hat{G}(s) = \hat{y}(s)/\hat{u}(s)$ mielivaltaiselle syöte-vasteparille u ja y. Matriisiarvoisessa tapauksessa voidaan menetellä vastaavasti jokaisen $\hat{G}(s)$:n matriisielementin tapauksessa. Valitsemalla testisignaalina käytetty syöte u sopivasti voidaan siirtofunktio löytää vaivattomammin. Ilmenee, että iskunluonteinen syöte saa lineaarisen mustan laatikon paljastamaan "sisimpänsä".

Merkitään δ_0:lla reaaliarvoista *Diracin delta-funktiota* eli yksikkömassa origossa. Kyseessä on itse asiassa nk. distribuutio eikä mikään oikea funktio (jolla olisi mm. arvoja), ja sen määräävä ominaisuus on

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(q)\delta_0(q)\, dq = v(0)$$

jokaisella jatkuvalla funktiolla v. Deltafunktio mallintaa ajassa täydellisesti lokalisoitunutta "iskua" tai "impulssia", jonka energiasisältö on normitettu 1:ksi.

Oletetaan että $u_0 \in \mathbf{C}^m$ on mielivaltainen, ja että Toeplitz-operaattori G_+ on annettu vakioitten variointikaavan

$$(G_+u)(t) := \int_0^t Ce^{(t-q)A}Bu(q)\, dq + Du(t) \quad \text{kaikilla} \quad t \geq 0$$

avulla. Sovelletaan tätä kaavaa syötteeseen $\delta_0 u_0$, jolloin saadaan muodollisesti

$$\begin{aligned}(G_+\delta_0 u_0)(t) &= \int_0^t Ce^{(t-q)A}B\delta_0(q)u_0\, dq + \delta_0(t)Du_0 \\ &= Ce^{tA}Bu_0 + \delta_0(t)Du_0 = \left(Ce^{tA}B + \delta_0(t)D\right) u_0.\end{aligned}$$

Distribuutiota $G(t) := Ce^{tA}B + \delta_0(t)D$ kutsutaan systeemin Σ *impulssivasteeksi.* Merkitsemme sitä samalla kirjaimella kuin systeemin I/O-kuvausta, mutta tarkoittaessamme impulssivastetta laitamme perään aikamuuttujan t. Impulssivaste on funktio, jos ja vain jos $D = 0$ eli systeemin siirtofunktio on täysin aito (ks. Määritelmä (14)).

Lasketaanpa impulssivasteen Laplace-muunnos. Jos $s > \sup_{\alpha \in \sigma(A)} \Re \alpha$, saadaan

$$\int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(Ce^{tA}B + \delta_0(t)D\right)\,dt = C\cdot\int_0^\infty e^{-(s-A)t}\,dt\cdot B + D$$

$$-\,C(s-A)^{-1}\Big|_0^\infty e^{-(s-A)t}B + D = D + C(s-A)^{-1}B = \hat{G}(s),$$

jossa sijoitustermi äärettömyydessä katoaa mikäli $\Re s$ on jossain oikeassa puolitasossa, riittävän kaukana. Huomaa, että matriisiarvoisen funktion Laplace-muunnoksen laskeminen on vain erikoistapaus vektorin Laplace-muunnoksesta. Ollaan siis melkein todistettu

Propositio 18. *Äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ impulssivaste on Laplace-muuntuva funktio, ja sen Laplace-muunnos on systeemin siirtofunktio.*

Tehtävä 19. *Olkoon A $n \times n$-matriisi. Osoita että jos*

$$\Re s > \max\left(\Re\lambda \quad | \quad \lambda \in \sigma(A)\right)$$

niin silloin $||e^{t(A-s)}|| \to 0$ kun $t \to \infty$. (Vihje: Jordan-muoto.)

Olemme nähneet että ideaalisen mustan laatikon $p \times m$-matriisiarvoinen siirtofunktio voidaan mitata periaatteessa mp mittauksella, syöttämällä sisään sopivasti moduloitua Delta-piikkiä. Tuloksena saadaan impulssivastedistribuution $G(t)$ kaikki mp-matriisielementtiä, jotka siis määräävät periaatteessa siirtofunktion. Käytännössä mokomalla shokkihoidolla toimitetaan musta laatikko vähintäänkin teho-osastolle. Vaikka itse pönttö kestäisikin rynkytystä, deltafunktiota approksimoivan energiapiikin huippu nousisi ehkä niin korkealle, että laatikko ei ehkä olisi enää sellaisilla signaalin arvoilla edes lineaarinen. Impulssivastetta tuskin voidaan mitata useinkaan noin suoraviivaisesti.[7] Siitä huolimatta sillä on tärkeä teoreettinen merkitys, joka seuraa seuraavasta tuloksesta:

[7]Prof. Krasnoselski kertoi Otaniemessä vieraillessaan joskus 90-luvun puolivälissä, että Neuvostoliiton voiman päivinä tehtiin seismisiä kokeita ydinräjähteillä, jotka edustivat aikansa state-of-the-art deltadistribuutioita. Kun deltafunktioiden saatavuus kävi myöhemmin vaikeammaksi, jouduttiin suunnittelemaan uusia testisignaaleja. Muistaakseni päädyttiin jonkinlaisiin kuormaautoilla kuljetettaviin "jyristimiin". Sinällään neuvostoliittolaisen ydinenergiatekniikan mieltymys deltadistribuutioihin tiedetään jatkuneen ainakin 80-luvulle asti.

Propositio 20. *Äärellisulotteisen systeemin* $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ *Toeplitz-operaattori voidaan esittää konvoluutiona*

$$(G_+u)(t) = \int_0^t G(t-q)u(q)\,dq,$$

jossa $G(\cdot)$ *on systeemin impulssivaste, ja* $u \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$ *on Laplace-muuntuva.*

Todistus. Edetään formaalisti, ja lasketaan funktion $y(t) := \int_0^t G(t-q)u(q)\,dq$ Laplace-muunnos. Saadaan

$$\int_0^\infty e^{-st} \int_0^t G(t-q)u(q)\,dq\,dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-s(t-q)}G(t-q)e^{-sq}u(q)\,dqdt$$
$$= \int_0^\infty \int_q^\infty e^{-s(t-q)}G(t-q)e^{-sq}u(q)\,dtdq = \int_0^\infty \left(\int_q^\infty e^{-s(t-q)}G(t-q)\,dt \right) e^{-sq}u(q)dq$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt \cdot \int_0^\infty e^{-sq}u(q)dq = \hat{G}(s)\hat{u}(s),$$

jossa viimeinen askel perustuu Propositioon 18. Koska funktion y Laplace-muunnos toteuttaa $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$, Proposition 13 perusteella päätellään että $y = G_+u$. □

4.3 Fourier-muunnos

Laplace-muuntuva signaali u oli määritelty pelkästään positiivisella reaaliakselilla. Tähän perusteena on se, että mikäli $\Re s > 0$, Laplace-integraalin integrandi $t \mapsto e^{-st}u(t)$ saattaa hyvinkin kasvaa eksponentiaalisesti kun $t \to -\infty$, ellei toisaalta $u(t)$ häviä tai ole ainakin hyvin pieni kun $t \to -\infty$. Laplace-muunnos on meille riittävä työkalu tutkittaessa yhtälön (8) määrittelemää alkuarvo-ongelmaa ja Toeplitz-operaattoria G_+, koska siellä sekä syötteet u että vasteet $y = G_+u$ ovat määritelty vain positiivisilla ajanhetkillä.

Voitaisiin toki määritellä myös nk. kaksipuoleinen Laplace-muunnos kaikille sellaisille $u \in C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ joille vastaava integraali

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-st}u(t)\,dt$$

suppenee. Esimerkiksi jos $\sup_{t\geq 0} e^{-st}||u(t)||_{\mathbf{C}^m} < \infty$ ja lisäksi $u \in C_{c-}(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$, niin u on selvästi kaksipuolisesti Laplace-muuntuva. Laajennettaessa Toeplitz-operaattori G_+ I/O-kuvaukseksi $G : C_{c-}(\mathbf{R};\mathbf{C}^m) \to C_{c-}(\mathbf{R};\mathbf{C}^p)$ (ks. Määritelmä (10)) tulevat juuri tällaiset signaalit kyseeseen. Eräissä tapauksissa tutkitaan kuitenkin I/O-stabiileja systeemejä $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, joiden Toeplitz-operaattori G_+ voidaan laajentaa myös sellaisille signaaleille u, jotka eivät välttämättä koskaan täysin häviä mentäessä kohti $-\infty$, mutta joiden "energiasisältö"on sensijaan rajoitettu. Tällaisia signaaleja käsitellään mukavimmin Fourier-muunnoksen avulla, mutta ensin pitää määritellä muutamia uusia signaaliavaruuksia.

Oletamme jatkossa, että lukija tuntee skalaariarvoisten funktioiden Lebesgue-integrointiteoriaa, tai ei nyt ainakaan säikähdä tolkuttomaan tilaan kuullessaan jo aikoja sitten kuolleitten ranskalaisten nimiä. Pääasiallisena syynä vaikeamman integrointiteorian käyttöön on se, että joudutaan käsittelemään epäjatkuvia signaaleja, joille klassinen Riemann-integraali ei ole määritelty.

Määritelmä 21. *Olkoon $m \in \mathbf{Z}_+$ mielivaltainen.*

Sanotaan että vektorifunktio $u : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^m$ on Lebesgue-mitallinen, jos sen jokainen komponentti on Lebesgue-mitallinen funktio.

Olkoon $1 \leq p < \infty$ mielivaltainen. Tällöin

$$L^p(\mathbf{R};\mathbf{C}^m) := \{u : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^m \text{ Lebesgue-mitallinen ja } \int_{\mathbf{R}} ||u(t)||^p_{\mathbf{C}^m}\, dt < \infty\}.$$

Jokaiselle $u \in L^p(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ määritellään normi

$$||u||^p_{L^p(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} := \int_{\mathbf{R}} ||u(t)||^p_{\mathbf{C}^m}\, dt.$$

Joukko $L^\infty(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ on niiden Lebesgue-mitallisten funktioiden u joukko, joille

$$||u||_{L^\infty(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbf{R}} ||u(t)||_{\mathbf{C}^m} := \sup_{t\in\mathbf{R}\setminus E} ||u(t)||_{\mathbf{C}^m} < \infty$$

eräällä Lebesgue-nollamitallisella (mahdollisesti tyhjällä) joukolla E.

Kaikissa L^p-avaruuksissa, $1 \leq p \leq \infty$, samaistetaan sellaiset funktiot jotka eroavat toisistaan vain Lebesgue-nollamittaisessa joukossa. Niinpä avaruudet eivät ole oikeastaan funktioiden avaruuksia, vaan ekvivalenssiluokkien avaruuksia.

Kaikki L^p-avaruudet $1 \leq p \leq \infty$ ovat Banach-avaruuksia, ja L^2 on itse asiassa Hilbert-avaruus sisätulolla

$$\langle u_1, u_2 \rangle := \int_{\mathbf{R}} \langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{\mathbf{C}^m} \, dt.$$

Usein puhutaan $p \times m$-matriisiarvoisten funktioiden $F(\cdot)$ aliluokasta $L^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p \times m})$, joka määritellään pitämällä näitä matriiseja pelkästään $p \times m$-vektoreina. Miellyttävin normi tälle avaruudelle on

$$||F||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbf{R}} ||F(t)||$$

jossa $||F(t)||$ on matriisin $p \times m$-matriisinormi

$$||F(t)|| = \sup_{a \in \mathbf{C}^m \setminus \{0\}} \frac{||F(t)a||_{\mathbf{C}^p}}{||a||_{\mathbf{C}^m}}.$$

Kuten sanottu, jokainen L^p-avaruus sisältää erittäin epäjatkuvia funktioita; konstruoi itse sellainen joka ei ole jatkuva missään reaaliakselin pisteessä! Toisaalta jokaista L^p-avaruuden elementtiä voidaan lähestyä (ko. avaruuden omassa normissaan) jatkuvilla, kompaktikantajaisilla[8] funktioilla, jos $1 \leq p < \infty$. Tällä rajankäynnillä voidaan mm. määritellä Cauchy-ongelmalle (8) sellaisia *yleistettyjä* ratkaisuja x, joiden aikaderivaatat x' saattavat olla hyvinkin epäjatkuvia syötteen u epäjatkuvuudesta johtuen. Emme siis tee kovin suurta syntiä jatkossakaan, vaikka intuitiivisesti ajattelisimme edelleen kaikkien signaalien olevan jatkuvia. Seuraava tehtävä edellyttää jonkin verran reaali- ja funktionaalianalyysin tekniikkojen tuntemusta.

Tehtävä 22. *Olkoon* $\Sigma := \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ *input-stabiili systeemi ja* $\mathcal{B}^t$ *sen kontrolloitavuusoperaattori. Olkoon* $x_0 \in \mathbf{C}^n$ *ja* $u \in L^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$ *mielivaltaisia. Osoita, että funktio*

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \mathcal{B}^t u$$

on hyvin määritelty kaikilla ja derivoituva (Lebesgue) melkein kaikilla $t \geq 0$, *laajentamalla operaattoria* $\mathcal{B}^t$ *sen jatkuvuuden perusteella. Osoita, että yhtälö* $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ *toteutuu (Lebesgue) melkein kaikilla* $t \geq 0$.

Säätöteorian kannalta tärkeimmät näistä avaruuksista ovat signaaleille L^1- ja L^2-avaruudet. Fourier-muunnos määritellään nk. Fourier-integraalin avulla kaikille $u \in L^1(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ seuraavasti:

[8] Reaaliakselilla määritelty funktio on kompaktikantajainen täsmälleen silloin kun se häviää jonkin äärellisen pituisen intervallin ulkopuolella.

Määritelmä 23. *Funktion $u \in L^1(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ Fourier-muunnos määritellään funktiona $\hat{u} : i\mathbf{R} \to \mathbf{C}^m$ integraalilla*

$$\hat{u}(i\omega) =: \int_{\mathbf{R}} e^{-i\omega t} u(t)\, dt, \tag{12}$$

ja tätä lineaarista kuvausta $u \mapsto \hat{u}$ merkitään kirjaimella $\mathcal{F}$. Myös kuvausta $\mathcal{F}$ kutsutaan Fourier-muunnokseksi.

Merkitsemme funktion u sekä Laplace- että Fourier-muunnoksia samalla symbolilla $\hat{u}$, mutta asiayhteydestä aina selviä kummasta kulloinkin on kysymys. Fourier-muunnettavilta funktioilta u on yllä vaadittu, että ne ovat luokassa L^1, josta seuraa että muunnoksen määrittelevä integraali suppenee itseisesti. Tällöin pätee myös nk. Riemann–Lebesgue -lemma: $\hat{u}$ on itse asiassa tasaisesti jatkuva funktio joka häviää äärettömyyksissä, eli lyhyemmin $\hat{u} \in C_0(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$. L^1-vaatimus voidaan poistaa seuraavan lemman 24 laajennuskonstruktiolla, mutta silloin menetään $\hat{u}$: sekä jatkuvuus että konvergenssi nollaan äärettömyyksiä lähestyttäessä.

Lemma 24. *Olkoon $\mathcal{F}$ kuten Määritelmässä 23.*

(i) *Jokaiselle $u \in L^1(\mathbf{R};\mathbf{C}^m) \cap L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ pätee*

$$||\mathcal{F}u||_{L^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} = ||u||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)},$$

jossa avaruuden $L^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ normi on määritelty

$$||\hat{u}||^2_{L^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ||\hat{u}(i\omega)||^2_{\mathbf{C}^m}\, d\omega.$$

(ii) *Fourier-muunnosoperaattori $\mathcal{F}$ voidaan laajentaa unitaariseksi kuvaukseksi $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m) \to L^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$, jota merkitään myös symbolilla $\mathcal{F}$ ja kutsutaan niin ikään (L^2-)Fourier-muunnokseksi.*

(iii) *Käänteis-Fourier-muunnosoperaattori $\mathcal{F}^{-1}$ toteuttaa kaavan*

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{i\omega t} \hat{u}(i\omega)\, d\omega,$$

kaikilla $\hat{u} \in L^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$, jossa raja-arvo otetaan avaruuden $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ normissa.

Todistus. Näiden tosiseikkojen todistukset löytyvät (ainakin skalaarimuodossa) kaikista harmonisen analyysin perusoppikirjoista, kuten Rudinin kirjoista tai Katznelsonin kirjasta. Väite (i) tunnetaan Plancherelin lauseen (ja joskus Parsevalin identiteetin) nimellä, ja väite (ii) on sen lähes välitön korollaari. Väite (iii) on taas tavanomainen Fourier-käänteismuunnoksen kaavan eräs muoto. Raja-arvo tarvitaan, koska epäolennainen integraali ei suppenisi yli $\mathbf{R}$:n kaikilla funktioilla $\hat{u}$. $\square$

Muutama huomautus edellisestä lemmasta on paikallaan. Kahden Hilbert-avaruuden välinen unitaarinen kuvaus $\mathcal{F}$ on yleisen määritelmän mukaan sellainen bijektio avaruuksien välillä, jonka sekä operaattorinormi että sen inverssin $\mathcal{F}^{-1}$ operaattorinormi $= 1$. Kyseessä on siis unitaarisen neliömatriisin suoraviivainen yleistys. Huomaa, että vaikka $\mathcal{F}$ on alunperin määritelty Fourier-integraalina (12), sen laajennus avaruudesta $L^1(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)\cap L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ avaruuteen $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ ei ole enää tämän integraalioperaattorin muotoa. Kun ei se sellainen integraali kerran suppene.

Kun Fourier-muunnos määritellään imaginaariakselilla $i\mathbf{R}$ elävänä funktiona, nähdään helposti sen yhteys Laplace-muunnokseen. Nimittäin, jos signaali u on sekä Fourier että Laplace-muuntuva (esim. $u \in C(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m) \cap L^1(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m)$), niin silloin

$$(\mathcal{F}u)(i\omega) = \lim_{\eta\to 0+} (\mathcal{L}u)(i\omega + \eta)$$

kaikilla $i\omega \in i\mathbf{R}$. (**Tähän olisi syytä kirjoittaa pieni vihje ja tarkennuskin.**)

Fourier-muunnoksella voidaan vihdoin karakterisoida I/O-stabiilin systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktio täydellisesti.

Lause 25. *Olkoon $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ äärellisulotteinen lineaarinen systeemi, jonka siirtofunktio on $G(\cdot)$. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:*

(i) Σ on I/O-stabiili.

(ii) Siirtofunktio $G(\cdot)$ on analyyttinen ja rajoitettu funktio joukossa $\mathbf{C}_\nu := \{s \in \mathbf{C} \quad | \quad Res > \nu\}$ eräällä $\nu < 0$.

Kun ekvivalentit ehdot (i) ja (ii) toteutuvat, tällöin systeemin energiavahvistus toteuttaa lausekkeen

$$||G_+||_\infty := \sup_{u \in L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m) \cap C(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m),\, u \neq 0} \frac{||G_+ u||_{L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^p)}}{||u||_{L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m)}}$$
$$= \sup_{\Re s > 0} ||G(s)||_{p \times m} = \sup_{i\omega \in i\mathbf{R}} ||G(i\omega)||_{p \times m}.$$

Todistus. Todistetaan pääpiirteissään implikaatio (i) $\Rightarrow$ (ii). Todistuksesta ei olennaisesti jää puuttumaan mitaan, vaikka olettaisimme että siirtofunktio $G(\cdot)$ on kompleksiarvoinen. Koska systeemi on äärellissulotteinen, sen siirtofunktio on myös rationaalinen, ja niinmuodoin määritelty ja äärellinen kaikissa paitsi ehkä äärellisen monessa imaginaariakselin $i\mathbf{R}$ pisteessä. Tällöin, jos G ei olisi analyyttinen eräässä joukossa $\mathbf{C}_\nu$, $\nu < 0$, tulisi sillä olla napa p_0, jonka reaaliosa olisi ei-negatiivinen. Oletetaanpa niin, ja katsotaan mitä siitä seuraa.

Jos $\Re p_0 > 0$, voidaan loytää syöte $u \in L^2(\mathbf{R}_+)$ jolle vaste $y = G_+ u$ kasvaisi eksponentiaalisesti, tarkastelemalla Laplace-muunnospuolella ja käyttämällä Propositiota 13. Tällöin Σ ei olisi I/O-stabiili. Jos taas $\Re p_0 = 0$, tulee tutkia tarkemmin multiplikaatio-operaattoria $M_G : \hat{u} \mapsto \hat{y}$;

$$(M_G \hat{u})(i\omega) = \hat{G}(i\omega)\hat{u}(i\omega), \quad i\omega \in i\mathbf{R}.$$

Määritellään funktiot $\hat{u}_\alpha(s) = 1/(s+\alpha)$, $\alpha \in C_+$. Tällöin $\hat{u}_\alpha$ on analyyttinen koko suljetussa oikeassa puolitasossa C_+, ja se on R_+:lla elävän funktion $u_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$ Laplace-muunnos. Antamalla $\alpha \to p_0$, seuraa

$$\frac{||M_G \hat{u}_\alpha||_{L^2(\mathbf{R}_+)}}{||\hat{u}_\alpha||_{L^2(\mathbf{R}_+)}} \to \infty,$$

koska $\hat{u}_\alpha$ “poimii” funktion $i\omega \mapsto \hat{G}(i\omega)$ “äärettömän suuren arvon” pisteessä $i\omega = p_0$ sitä paremmin mitä lähempänä α on napaa.

Käyttämällä Plancherelin lausetta (Lemman 24 väite (i)), siirrytään normit säilyttäen aikatasoon, ja todetaan systeemi ei voi olla I/O-stabiili jos sillä on napa imaginaariakselilla.

Niinpä seuraa että siirtofunktion $\hat{G}(\cdot)$ napojen tulee olla jossain puolitasossa $\mathbf{C}_\nu$ jollain $\nu < 0$. Tällainen rationaalifunktio on triviaalisti rajoitettu analyyttinen funktio oikeassa puolitasossa $\mathbf{C}_+$. $\square$

Lause 26. *I/O-stabiilin systeemin I/O-kuvaus* $G : C_{c-}(\mathbf{R};\mathbf{C}^m) \to C_{c-}(\mathbf{R};\mathbf{C}^p)$ *voidaan laajentaa joukosta* $C_{c-}(\mathbf{R};\mathbf{C}^m) \cap L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ *lineaariseksi operaattoriksi* $\overline{G} : L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m) \to L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^p)$*, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

(i) $\overline{G}$ *on aikainvariantti; eli* $\overline{G}\tau^h = \tau^h\overline{G}$ *kaikilla* $h \in \mathbf{R}$.

(ii) $\overline{G}$ *on kausaalinen; eli jos* $u(t) = 0$ *kaikilla* $t \leq 0$*, niin silloin* $\left(\overline{G}u\right)(t) = 0$ *kaikilla* $t \leq 0$.

(iii) Energiavahvistus toteuttaa yhtälön

$$||\overline{G}||_\infty := \sup_{u \in L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m)\, u \neq 0} \frac{||\overline{G}u||_{L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^p)}}{||u||_{L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m)}} = \sup_{i\omega \in i\mathbf{R}} ||G(i\omega)||_{p\times m},$$

jossa $\hat{G}(\cdot)$ *on systeemin siirtofunktio.*

(**3. luento v. 2002 päättyi tähän**)

4.4 Hardy-avaruudet

Edellä tarkasteltiin signaaleja avaruudessa $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$. Näiden signaalien eräs ominaisuus oli se, että tällaiset signalit eivät yleensä häviä missään $-\infty$:n ympäristössä. Todettiin että tällaisten signaalien käyttö Cauchy-ongelman (8) yhteydessä aiheuttaa kahdenlaisia ongelmia. Ensiksi, L^2-syötteiltä puuttuva jatkuvuus tekee differentiaaliyhtälön ratkaisun teknillisesti vaikeammaksi, mutta tästä päästiin ympäri esim. approksimoimalla signaaleja jatkuvilla signaaleilla tai käyttämällä vahvempia reaalianalyysin työkaluja yleisemmän Cauchy-ongelman ratkaisemissa. Toiseksi, että L^2-signaali ei häviä kaikilla riittävän negatiivisilla ajanhetkillä, tekee mahdottomaksi asettaa systeemin differentiaaliyhtälöä alkuarvo- eli Cauchy-ongelman(8) muodossa. Tästä (ja eräistä muista, mm. kausaalisuustarkasteluihin liittyvistä syistä) tarvitsemme erityisesti sellaisia (ehkä hyvinkin epäjatkuvia) L^2-signaaleja, jotka poikkeavat nollasta vain positiisilla ajanhetkillä.

Tarkastellaan siis sellaisia $\mathbf{C}^m$-arvoisia signaaleja, jotka ovat muutoin L^2-funktioita, mutta häviävät kaikilla negatiivisilla ajan hetkillä. Nämä signaalit muodostavat Hilbert-avaruuden, jota merkitään symbolilla $L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m)$. Selvästi voidaan tehdä ortogonaalinen suora summa -hajotelma

$$L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m) = L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m) \oplus L^2(\mathbf{R}_-;\mathbf{C}^m), \tag{13}$$

jossa jälkimmäisen avaruuden elementit ovat tasan niitä L^2-funktioita jotka häviävät joukossa $\mathbf{R}_+$. Koska Fourier muunnos on unitaarinen ekvivalenssi avaruuksien $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ ja $L^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ välillä (ks. Lemman 24 väite (i)), haluamme tietää kuinka ortogonaalinen suora summa (13) esitetään taajuustasossa. L^2-Fourier-muunnoksen unitaarisuudesta johtuen ortogonaaliset avaruudet kuvautuvat ortognaalisille avaruuksille. Päädymme funktioteoriasta tuttujen *Hardy-avaruuksien* ja niiden elementtien *nontangentiaalisiin reuna-arvojen* tutkimiseen.

Määritelmä 27. *(i) Symbolilla $H^2(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^m)$ merkitään niiden $\mathbf{C}^m$-arvoisten, vasemmassa puolitasossa $\mathbf{C}_+$ analyyttisten funktioiden $\hat{u}$ vektoriavaruutta, joille*

$$\sup_{r>0} \int_{-\infty}^{\infty} ||\hat{u}(r+i\omega)||^2_{\mathbf{C}^m}\, d\omega < \infty,$$

varustettuna normilla

$$||\hat{u}||_2^2 := \frac{1}{2\pi} \sup_{r>0} \int_{-\infty}^{\infty} ||\hat{u}(r+i\omega)||^2_{\mathbf{C}^m}\, d\omega.$$

(ii) *Symbolilla $H^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$ merkitään niiden $p\times m$ matriisiarvoisten, oikeassa puolitasossa analyyttisten funktioiden vektorivaruutta, joille luku*

$$||\hat{G}||_\infty := \sup_{\Re s>0} ||\hat{G}(s)||_{p\times m}$$

on äärellinen. Tätä lukua kutsutaan funktion $\hat{G}$ H^∞-normiksi.

(iii) *Vektoriavaruus $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$ on niiden alkioiden $\hat{G}\in H^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$ osajoukko, jotka lisäksi ovat rationaalisia funktioita.*

(iv) *Vektoriavaruus $RL^\infty(i\mathbf{R};\mathbf{C}^{p\times m})$ on niiden $\mathbf{C}^{p\times m}$-arvoisten rationaalifunktioiden $\hat{G}$ joukko, joilla ei ole napoja imaginaariakselilla.*

Avaruus $H^2(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^m)$ on annetulla normillaan varustettuna Hilbert-avaruus, ja samoin on $H^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$ Banach-avaruus. Voidaan osoittaa, että funktio $(0,\infty)\ni r\mapsto \int_{-\infty}^{\infty}||\hat{u}(r+i\omega)||^2_{\mathbf{C}^m}\,d\omega\mapsto[0,\infty]$ on ei-kasvava, joten H^2-avaruuden normi voidaan antaa muodossa

$$||\hat{u}||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}||\hat{u}(r+i\omega)||^2_{\mathbf{C}^m}\,d\omega.$$

Mitä tulee avaruuteen $RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$, Lauseen 25 väite voidaan lausua seuraavassa muodossa.

Propositio 28. *Seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *$\hat{G}(\cdot)$ Äärellisulotteisten, I/O-stabiilien lineaaristen systeemien $\Sigma=\left[\begin{smallmatrix}A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktio, jossa m ja p ovat input- ja output-avaruuksien dimensiot,*

(ii) *$\hat{G}(\cdot)\in RH^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$, ja*

(iii) *$\hat{G}(\cdot)$ on rationalinen funktio, jonka kaikki navat sijaitsevat vasemmassa puolitasossa $\mathbf{C}_-$.*

Molemmilla avaruuksilla $H^2(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^m)$, $H^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^{p\times m})$ on se ominaisuus, että niiden alkiot $\hat{u}$, $\hat{G}$ voidaan yleistetyssä mielessä nähdä funktioina imaginaariakselilla $i\mathbf{R}$, vaikka ne alunperin ovat määriteltyjä vain avoimessa oikeassa puolitasossa $\mathbf{C}_+$.

Lemma 29. *Olkoon $\hat{u}\in H^2(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^m)$ ja $\hat{G}\in H^\infty(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^m)$ mielivaltaisia.*

(i) Melkein kaikilla $i\omega \in i\mathbf{R}$ on olemassa vektori $\hat{u}(i\omega) \in \mathbf{C}^m$, jolle pätee

$$\lim_{j \to \infty} \hat{u}(s_j) = \hat{u}(i\omega)$$

kaikilla jonoilla $\{s_j\}_{j \geq 1} \subset \mathbf{C}_+$ jotka konvergoivat pisteeseen $i\omega$ nontangentialisesti. Raja-arvojen muodostama Lebesgue-melkein kaikkialla määritelty funktio (jota merkitään myös symbolilla $\hat{u}$) toteuttaa $\hat{u} \in L^2(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ ja lisäksi

$$||\hat{u}||_{L^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} = ||\hat{u}||_2. \tag{14}$$

(ii) Melkein kaikilla $i\omega \in i\mathbf{R}$ on olemassa vektori $\hat{G}(i\omega) \in \mathbf{C}^{p \times m}$, jolle pätee

$$\lim_{j \to \infty} \hat{u}(s_j) = \hat{G}(i\omega)$$

kaikilla jonoilla $\{s_j\}_{j \geq 1} \subset \mathbf{C}_+$ jotka konvergoivat pisteeseen $i\omega$ nontangentialisesti. Raja-arvojen muodostama Lebesgue-melkein kaikkialla määritelty funktio (jota merkitään myös symbolilla $\hat{u}$) toteuttaa $\hat{G} \in L^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ ja lisäksi

$$||\hat{G}||_{L^\infty(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} = ||\hat{G}||_\infty. \tag{15}$$

Todistus. Tämä löytyy skalaarimuodossa vaikkapa Rudinin Real and Complex analysis -kirjasta. Esitetyn vektoriarvoisen variantin todistus etenee samalla tavalla. Ääretöndimensioisissa avaruuksissa todistus on jonkin verran teknillisempi, ja se löytyy esim. Rosenblumin ja Rovnyakin kirjasta. □

Nontangentiaalinen korvergenssi jonolle $\{s_j\}_{j \geq 1}$ tarkoittaa sitö, että kaikki jonon alkiot ovat jossain sektorissa, jonka keskuskulma on alle π, ja keskipiste imaginaariakselilla olevassa jonon rajapisteessä.

Määritelmä 30. *Elementtien $\hat{u} \in H^2(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^m)$ ja $\hat{G} \in H^\infty(\mathbf{C}_+; \mathbf{C}^{p \times m})$ pistettäisiä raja-arvoja imaginaariakselilla kutsutaan ko. funktioiden nontangentiaalisiksi reuna-arvofunktioiksi. Niitä merkitään samalla symbolilla kuin alkuperäisiä funktioita. Nontangentiaalisten reuna-arvofunktioiden luokkia merkitään $H^2(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^m) \subset L^2(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ ja $H^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p \times m}) \subset L^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p \times m})$.*

Isometrisista normiestimaateista (14) ja (15) seuraa suoraan, että $H^2(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ ja $H^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p \times m})$ ovat (Banach) avaruuksien $L^2(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ ja $L^\infty(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p \times m})$ suljettuja aliavaruuksia. On helppo osoittaa että molemmat ovat aitoja aliavaruuksia, valitsemalla sopivia rationaalifunktioita. Hilbert-avaruus $H^2(i\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ voidaan karakterisoida L^2-Fourier-muunnoksen kautta nk. Paley–Wiener lauseen avulla.

Lemma 31. *Olkoon* $\hat{u} \in L^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$ *mielivaltainen. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) $\hat{u} \in H^2(i\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$, *ja*

(ii) $\hat{u} = \mathcal{F}u$ *eräälle* $u \in L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m)$, *jossa* $\mathcal{F}$ *merkitsee* L^2*-Fourier-muunnosta.*

Kun ekvivalentit ehdot (i) ja (ii) toteutuvat, määrittelee ($L^2(\mathbf{R}_+)$*-avaruuteen yleistetty) Laplace-muunnos*

$$\hat{u}_l(s) := \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-st} u(t)\, dt \tag{16}$$

analyyttisen funktion $\mathbf{C}_+ \ni s \mapsto \hat{u}_l(s) \in \mathbf{C}^m$ *joka toteuttaa* $\hat{u}_l \in H^2(\mathbf{C}_+;\mathbf{C}^m)$, *ja jonka nontangentialiset reuna-arvot toteuttaa* $\hat{u}_l(i\omega) = \hat{u}(i\omega)$ *Lebesgue-melkein kaikilla* $i\omega \in i\mathbf{R}$.

Todistus. Ekvivalenssiosan todistus löytyy esim. Dymin ja McKeanin Fourier series and integrals – kirjasta. Analyyttisen jatkon antava säännöllistetty Laplace-muunnos (16) seuraa ihan peruskonvergenssianalyysillä. $\square$