3 Jatkuvan ajan lineaariset tila-avaruussysteemit

3.1 Cauchy-ongelma

Satunnainen matkailija kohtaa harvemmin edellä esitettyjä "mustia laatikoita" sinänsä [4], vaan yleensä mokomat lineaariset kuvaukset on annettu matemaattisten yhtälöitten muodossa.

Nämä yhtälöt ovat tyypillisimmin muodoltaan integraali-, differentiaali tai jopa integrodifferentiaaliyhtälöitä kun työskennellään jatkuvassa ajassa. Diskreetissä ajassa luonnolliset yhtälöt ovat differenssiyhtälöitä. Nämä yhtälöt — silloin kun niillä voidaan osoittaa olevan yksikäsitteisiä ratkaisuja — määrittelevät *dynaamisia systeemejä.* Dynaamisten epälineaaristen sekä lineaaristen systeemien teoria on noin vuosisadan ikäinen, valtavan laaja ja edelleen nopeasti etenevä matematiikan osa-alue, joka on saanut paljon vaikutteita ongelmiinsa sekä fysiikan että insinööritieteitten puolelta.

Tällä kurssilla tarkastelemme erästä pientä mutta sovellutuksissa erittäin tärkeää osaluokkaa systeemejä, nimittäin äärellisulotteisen tila-avaruuden lineaarisia, aikainvariantteja systeemejä. Kiinnostus tällaisiin systeemeihin lienee niinikään toista sataa vuotta vanhaa, mutta teoria alkoi kehittyä nopeasti 1940- ja 1950-luvuilla. Syynä tähän oli lähinnä uusien matemaattisten suunnittelutyökalujen tarve analogisessa elektroniikassa ja säätötekniikassa.

Tarkastellaan yleistä matriisidifferentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{6}$$

jossa A on $n \times n$-matriisi ja B on $n \times m$-matriisi. Parametri t on *aikamuuttuja.* Vektori $x_0 \in \mathbf{C}^n$ on *alkutila* hetkellä $t = 0$. Differentiaaliyhtälö (6) on laadultaan *alkuarvo- eli Cauchy-ongelma.* Funktiota $u \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$ kutsutaan *syöte eli "inputiksi"*, ja se on määritelty kaikilla positiivisilla ajanhetkillä $t \geq 0$. Mikäli on olemassa jatkuvasti derivoituva funktio $x \in C^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^n)$ joka toteuttaa yhtälön (8) kaikilla $t \geq 0$, kutsutaan tällaista funktiota syötettä u vastaavaksi *tilatrajektoriksi.* Vektoriavaruutta $\mathbf{C}^n$ jossa tilatrajektori x "elää"

[4]...ja vaikka kohtaisikin, niin mistä tietäisi kohdanneensa? Missä mielessä on olemassa "pelkkiä" lineaarisia operaattoreita, joilla ei ole muita ominaisuuksia kuin lineaarisuus? Ja onko olemassa "mies ilman ominaisuuksia"?

kutsutaan luonnollisesti *tila-avaruudeksi.* Kokonaislukua n kutsutaan *tila-avaruuden dimensioksi.*

Käytännön sovellutuksissa ei voida yleensä olettaa, että tilatrajektori x olisi havaittavissa suoraan, vaan pelkästään erään havaintoyhtälön

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \geq 0, \tag{7}$$

kautta. Tässä C on $p \times n$-matriisi ja D on $p \times m$-matriisi. Funktiota y kutsutaan *ulostuloksi eli "outputiksi"*. Yhtälöt (6) ja (7) muodostavat yhdessä yhtälösysteemin

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{8}$$

Differentiaaliyhtälösysteemin matriisinelikkoa $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ kutsutaan lineaariseksi, aikainvariantiksi, jatkuvan ajan *systeemiksi.* Matriisien dimensiot ovat seuraavasti: A on $n \times n$, B on $n \times m$, C on $p \times n$ ja D on $p \times m$. Matriiseilla on nimetkin: A on *(puoliryhmän) generaattori*, B *on kontrollio-peraattori*, C *on havainto-operaattori* ja D *on läpisyöttöoperaattori.* Yhteisellä nimellä operaattoreita A, B, C ja D kutsutaan systeemin *generoiviksi operaattoreiksi.* Koska tila-avaruuden dimensio n on äärellinen, kutsutaan systeemiä *äärellisulotteiseksi.*

Mikäli syöte $u \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$, nähdään että yhtälöllä (8) on ratkaisu, joka löydetään esim. vakioitten variointimenettelyllä.

Propositio 7. *Olkoon matriisinelikko* $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $x_0 \in \mathbf{C}^n$ *mielivaltaisia. Olkoon* $u \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$. *Tällöin Cauchy-ongelmalla (8) on yksikäsitteinen ratkaisu, jota vastaa tilatrajektori*

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-q)A}Bu(q)\,dq. \tag{9}$$

Tilatrajektori toteuttaa $x \in C^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^n)$ *ja ulostuleva signaali toteuttaa* $y \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^p)$.

Todistus. Yhtälö (9) voidaan kirjoittaa muotoon

$$x(t) = e^{tA}\left(x_0 + \int_0^t e^{-qA}Bu(q)\,dq\right),$$

jossa integraalin sisällä oleva funktio $q \mapsto e^{-qA}Bu(q)$ on jatkuva, koska u on oletettu jatkuvaksi. Mutta jatkuvan funktion integraalifunktio on jatkuvasti derivoituva, joten $x \in C^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^n)$. Niinpä x voidaan derivoida, ja laskettaessa derivaatta $x'(t)$ havaitaan, että se toteuttaa differentiaaliyhtälön (6). Koska $u \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$ ja $x \in C^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^n) \subset C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^n)$, selvästi $y := Cx + Du \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^p)$. $\square$

3.2 Systeemi ratkaistussa muodossa

Proposition 7 perusteella systeemi $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ määrittelee siis kuvauksen $(u, x_0) \mapsto y$, jonka antaa kaava

$$y(t) = Ce^{tA}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-q)A}Bu(q)\,dq + Du(t).$$

Määrittelemällä lineaariset operaattorit $\mathcal{C} : \mathbf{C}^n \to C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^p)$

$$(\mathcal{C}x_0)(t) := Ce^{tA}x_0 \quad \text{kaikilla} \quad t \geq 0$$

ja $G_+ : C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m) \to C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^p)$

$$(G_+u)(t) := \int_0^t Ce^{(t-q)A}Bu(q)\,dq + Du(t) \quad \text{kaikilla} \quad t \geq 0$$

voidaan kirjoittaa $y = \mathcal{C}x_0 + G_+u$. Edelleen, määrittelemällä jokaiselle $t \geq 0$

$$\mathcal{B}^t u := \int_0^t e^{(t-q)A}Bu(q)\,dq$$

voidaan lausua $x(t) = e^{tA}x_0 + \mathcal{B}^t u$ kaikilla $t \geq 0$. Näillä lineaarisilla kuvauksilla on nimetkin.

Määritelmä 8. *Olkoon $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ jatkuvan ajan systeemi. Tällöin $\mathcal{B}^t : C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m) \to \mathbf{C}^n$ on kontrolloitavuusoperaattori (controllability map), $\mathcal{C} : \mathbf{C}^n \to C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^p)$ on havaittavuusoperaattori (observability map), ja G_+ on (I/O -kuvauksen) Toeplitz-operaattori.*

Karkeasti sanoen kontrolloitavuusoperaattori kuvaa menneen ajan syötteet nykyhetken tilalle, kun alkutila jossain äärettömän kaukana menneisyydessä on oletettu nollaksi. Havaittavuusoperaattori kuvaa nykyhetken tilan tulevaisuuden ulostulolle, mikäli tulevaisuudessa systeemin syöte oletetaan nollaksi.

Jos kontrolloitavuusoperaattori on määritelty kuten Määritelmässä 8, tarvitaan itse asiassa perhe operaattoreita $\mathcal{B}^t$, $t \geq 0$. Voitaisiin tulla myös toimeen yhdellä operaattorilla, jota voitaisiin ehkä oikeutetummin kutsua kontrolloitavuusoperaattoriksi. Koska integraali

$$\mathcal{B}v := \int_0^\infty e^{qA} Bv(-q)\, dq$$

suppenee ja määrittelee operaattorin $\mathcal{B} : C_{c-}(\mathbf{R}_-; \mathbf{C}^m) \to \mathbf{C}^n$, voidaan kirjoittaa $\mathcal{B}^t u = \mathcal{B}\tau^t u$ kaikilla $t \geq 0$ ja $u \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$, $u(0) = 0$.

Jatkuvan ajan systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ Toeplitz-operaattori G_+ määrittelee itse asiassa yksikäsitteisesti erään lineaarisen, translaatio- ja aikainvariantin, kausaalisen kuvauksen $G : C_{c-}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m) \to C_{c-}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^p)$. Olkoon $u \in C_{c-}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ mielivaltainen, ja olkoon $t_0 \in \mathbf{R}$ niin pieni, että $u(t) = 0$ kaikilla $t \leq t_0$. Silloin $\tau^{t_0} u \in C_{c-}(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$[5], ja voidaan määritellä vektori $Gu := \tau^{-t_0} G_+ \tau^{t_0} u$. Osoittautuu, että näin saatu Gu on riippumaton t_0:n arvosta kunhan se on vain riittävän lähellä $-\infty$:tä.

Tehtävä 9. *Osoita, että yllä esitetty G_+:n laajennus G on hyvin määritelty, lineaarinen, translaatio- ja aikainvariantti, sekä kausaalinen. Kuinka Toeplitz-operaattori G_+ lausutaan laajennuksensa G avulla?*

Oltaisiin voitu myös edetä suoraan määrittelemällä Cauchy–ongelma (8) syötteestä $u \in C_{c-}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ riippuvalla alkuhetkellä $t_0 \in \mathbf{R}$ sen sijaan, että alkuhetkeksi valittiin $t_0 = 0$ ja syötteet avaruudesta $C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$. Alkuhetki t_0 olisi luonnollisesti valittu (syötteestä u riippuen) niin pieneksi, että $u(t) = 0$ kaikilla $t \leq t_0$, ja vastaavana alkuarvona käytettäisiin $x(t_0) = 0$.

Määritelmä 10. *Olkoon $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ jatkuvan ajan systeemi. Tällöin yllä esitetty G_+:n laajennus $G : C_{c-}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m) \to C_{c-}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^p)$ on systeemin* I/O -kuvaus.

[5] samaistamalla $C_{c-}(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^m)$ sen $C_{c-}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ aliavaruuden kanssa, jonka alkiot häviävät koko negatiivisella reaaliakselilla

Systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ I/O-kuvaus G on siis eräässä mielessä lineaarinen, aika- ja translaatioinvariantti, kausaalinen musta laatikko, paitsi että tiedämme tasan tarkkaan systeemin Σ sisuskalut joista kuvaus G on saanut alkunsa.

Propositio 11. *Olkoon systeemi $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ annettu, ja oletetaan että $\sigma(A) \subset \mathbf{C}_-$. Silloin Toeplitz-operaattorin G_+ laajennus G on I/O-stabiili, eli on olemassa vakio $C < \infty$ siten että $||Gu||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^p)} \leq C||u||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)}$.*

Todistus. Jonkinlaisen ylimalkaisen todistuksen voisi esittää tästä, mutta se ei todellakaan ole ylivoimainen harjoitustehtävänä, matriisitapauksessa. Todistus tulee perustumaan siihen, että matriiseille joilla $\sigma(A) \subset \mathbf{C}_-$ pätee myös

$$||e^{tA}|| \leq Me^{-rt} \quad t \geq 0$$

eräillä $M < \infty$ ja $r > 0$. Tämä todistetaan helpoimmin matriisin A Jordan-muodon avulla. $\square$

Mikäli edellisen proposition vakio C on löydettävissä, sanotaan että systeemi Σ on *I/O-stabiili*. Mikäli on olemassa vakiot C_1, C_2 siten että

$$\begin{aligned} ||\mathcal{B}u||_{\mathbf{C}^n} &\leq C_1||u||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} \quad \text{kaikilla} \quad u \in C(\mathbf{R}_-;\mathbf{C}^m), \\ ||\mathcal{C}x||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} &\leq C_2||x||_{\mathbf{C}^n} \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbf{C}^n, \end{aligned}$$

sanotaan että Σ on ensimmäisessa tapauksessa *input-stabiili*, ja jälkimmäisessä tapauksessa *output-stabiili.* Mikäli $\sigma(A) \subset \mathbf{C}_-$, systeemi Σ on sekä input- että output-stabiili, mikä todistetaan olennaisesti samalla tavoin kuin Proposition 11 väite.

Mikäli range $(\mathcal{B}^t) = \mathbf{C}^n$ jollain $0 < t_1 < \infty$, sanotaan että systeemi on *tarkasti säädettävä* (exactly controllable). Tällöin jokainen tila-avaruuden vektori voidaan saavuttaa äärellisessä ajassa $t = t_1$ valitsemalla sopiva syöte $u \in C(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^m)$, alkaen nollatilasta $x_0 = 0$ hetkellä $t = 0$. Mikäli $\ker(\mathcal{C}) = \cap_{t\geq 0}\ker\left(Ce^{At}\right) = \{0\}$, sanotaan systeemiä *tarkasti havaittavaksi* (exactly observable). Tällöin mielivaltaiset kaksi eri alkutilaa x_0 ja x_1, $x_0 \neq x_1$ voidaan erottaa toisistaan mittaamalla ulostuloa korkeintaan äärellisen ajan t_1 verran, olettaen että sisäänmenot pidetään molemmissa kokeissa samoina. Äärellisdimensioisille systeemeille voidaan käyttää nk. *Hautusin kriteeriä*, jonka mukaan matriisiparin (A, B) määrittelemä kontrolloitavuusoperaattori $\mathcal{B}$ on tarkasti säädettävä mikäli lohkomatriisin $[B \quad AB \quad A^2B \cdots A^jB]$ rangi on tila-avaruuden dimensio n jollain riittävän isolla kokonaisluvulla j. Vastaava kriteeri voidaan antaa myös tarkalle havaittavuudelle.

Tarkasti säädettävää ja havaittavaa systeemiä kutsutaan *minimaaliseksi*. Minimaalisen, äärellisulotteisen systeemin tila-avaruuden dimensio on pienin mahdollinen, joka riittää ko. input/output -kuvauksen reaalisoimiseen. Mielivaltaisesta systeemistä $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix} \right]$ voidaan poistaa "turha osa" tila-avaruutta, jolloin saatu uusi systeemi tulee minimaaliseksi. Reaalisaatioteoriassa ollaan usein kiinnostuneita juuri minimaalisten systeemien konstruoimisesta annetulle mustalle laatikolle G.

(**2. luento v. 2002 päättyi tähän**)