Siirtofunktioiden teoria

Jarmo Malinen

27. helmikuuta 2002

1 Notaatiota

Näissä luentomuistiinpanoissa käytetään seuraavia symboleja.

Kompleksitasoa merkitään symbolilla $\mathbf{C}$ ja reaaliakselia $\mathbf{R}$. Oikea ja vasen puolitaso ovat $\mathbf{C}_+ := \{s \in \mathbf{C} \quad | \quad \Re s > 0\}$ ja $\mathbf{C}_- := \{s \in \mathbf{C} \quad | \quad \Re s < 0\}$. Positiivinen ja negatiivinen reaaliakseli ovat $\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} \quad | \quad x > 0\}$ ja $\mathbf{R}_- := \{x \in \mathbf{R} \quad | \quad x < 0\}$. Imaginääriakselia merkitään $i\mathbf{R}$. Avoin yksikkökiekko on $\mathbf{D}$ ja sen reuna, yksikköympyrä, on $\mathbf{T}$. Luonnolliset luvut ovat $\mathbf{N} := \{1, 2, \ldots\}$. Kokonaislukuja merkitään $\mathbf{Z}$ ja ei-negatiivisia kokonaislukuja $\mathbf{Z}_+$. Edelleen $\mathbf{Z}_- := \mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}_+$.

Olkoon $n \in \mathbf{N}$ mielivaltainen. Silloin $\mathbf{C}^n$ ja $\mathbf{R}^n$ merkitsevät n-ulotteisia pystyvektoreita, joiden komponentit ovat avaruuksissa $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{R}$. Jatkuvien, $\mathbf{C}^n$-arvoisten funktioiden perheitä joukoilla $\mathbf{R}$ ja $\mathbf{R}_+$ merkitään symboleilla $C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^n)$ ja $C(\mathbf{R}_+; \mathbf{C}^n)$. Niiden jatkuvien funktioiden, jotka lähestyvat nollaa äärettömyydessä, merkitään $C_0(\mathbf{R}; \mathbf{C}^n)$. Edelleen niiden funktioiden $f \in C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^n)$ luokkaa merkitään $C_{c-}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^n)$, joilla $f(t) = 0$ kaikilla $t < T_f$ eräällä $T_f > -\infty$. Jos $k \in \mathbf{N}$, niin $C^k(\mathbf{R}; \mathbf{C}^n)$ on niiden $\mathbf{C}^n$-arvoisten funktioiden perhe, joiden k ensimmäistä derivaattaa on jatkuvia.

Muuta notaatiota otetaan käyttöön sitten kun tarvitaan.

2 Johdanto

Tarkastellaan peruskäsitteitä kuten signaaleja ja lineaarisia, aikainvariantteja "mustia laatikoita". Muutama sana aikainvarianssista ja stabiilisuudesta, sekä takaisinkytkentään perustuvasta säädöstä.

2.1 Lineaarisuus, aikainvarianssi, kausaalisuus

Olkoon $m, p \in \mathbf{N}$ mielivaltaisia. Merkitään $\mathbf{C}^m$-arvoisten, reaaliluvuilla $\mathbf{R}$ jatkuvien funktioiden vektoriavaruutta symbolilla $C(\mathbf{R}; C^m)$. Olkoon $G : C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m) \to C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^p)$ lineaarinen kuvaus, eli jokaisella $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ ja $u_1, u_2 \in C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ pätee

$$G(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 G u_1 + \lambda_2 G u_2.$$

Tällaista kuvausta G voidaan kutsua *jatkuvan ajan lineaariseksi mustaksi laatikoksi*, ja vektoriarvoisia funktioita u_1 ja u_2 laatikkoon sisäänmeneviksi *signaaleiksi*. Funktio $Gu_1 \in C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^p)$ on laatikosta ulostuleva signaali. Puhutaan myös *syötteestä* ja *vasteesta*, sekä Suomen kieltä raiskaten *inputista* ja *outputista*. Oletamme matemaattisen yksinkertaisuuden vuoksi, että signaalit ovat jatkuvia reaaliparametrinsa $t \in \mathbf{R}$ funktioita, jota parametria tulee ajatella *jatkuvana aikana*. Mikäli parametrijoukkona käytettäisiin kokonaislukuja $\mathbf{Z}$, voitaisiin tehdä samankaltaisia tarkasteluja, mutta puhuttaisiin *diskreetistä ajasta*.

Että laatikko on musta, viittaa siihen että emme pysty näkemään sen sisäistä rakennetta minkäänlaisella taskulampulla tai tähystimellä. Kyseessä ei ole mikään mustan laatikon (s.o. lineaarisen kuvauksen G) matemaattinen ominaisuus ("mustuus?"), vaan pelkästään tapa kuvata olematonta tietoamme erään lineaarisen kuvauksen G rakenteesta. Emme kykene muuhun kuin valitsemaan syötteen u ja mittaamaan vasteen Gu ilman virhettä. Insinöörin kannalta tämäkin on aika paljon oletettu.

Aikatranslaatio τ^h, $h \in \mathbf{R}$ on lineaarinen kuvaus kaikilla signaaleilla joukossa $C(\mathbf{R}; C^m)$, joka määritellään

$$\left(\tau^h u\right)(t) = u(t+h).$$

Jos $h > 0$, kyseessä on selvästi translaatio ajassa taaksepäin, mikäli aikaparametrin t positiiviset arvot (kuten tapana on) sovitaan vastaavan tulevaisuutta. Mikäli edellä määritelty musta laatikko G toteuttaa

$$\left(G\tau^h u\right)(t) = \left(\tau^h (Gu)\right)(t) = (Gu)(t+h) \quad \text{kaikilla} \quad h, t \in \mathbf{R},$$

sanotaan että G on lisäksi *ajasta riippumaton* eli *aikainvariantti.* Operaattorikielellä tämä kirjoitetaan lyhyemmin kommutaatioehtona $G\tau^h = \tau^h G$ kaikilla $h \in \mathbf{R}$. Huomaa että aikainvariantin mustan laatikon (meille täysin tuntematon) sisäinen rakenne saattaa hyvinkin "elää" ajan mukana — tai olla elämättä. Aikainvarianssista seuraa, että ei ole mitään keinoa varmentaa asiaa suuntaan tai toiseen tekemällä mittauksia laatikon ulostulosta $G\left(\tau^h u\right)$ eri tavoin viivästetyillä, mutta muutoin identtisillä syötteillä $\tau^h u$ eri arvoilla $h \in \mathbf{R}$, mutta kiinteällä $u \in C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$.

Tehtävä 1. *Osoita esimerkillä, että lineaarisen, aikainvariantin mustan laatikon G sisäinen rakenne (jota siis emme oikeasti voi tietää) voi olla ajasta riippuva.*

Mustan laatikon G *kausaalisuudella* tarkoitetaan sitä, että muutokset tulevassa syötteessä $u(t)$, $t \geq t_0$, eivät voi vaikuttaa menneisyydessä saatuun vasteeseen $(Gu)(t)$, $t < t_0$. Matemaattisemmin, jokaisella $t_0 \in \mathbf{R}$ pätee

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{kaikilla} \quad t < t_0 \Rightarrow (Gu_1)(t) = (Gu_2)(t) \quad \text{kaikilla} \quad t < t_0.$$

Lineaarisessa tapauksessa voidaan kirjoittaa ekvivalentisti

$$u(t) = 0 \quad \text{kaikilla} \quad t < t_0 \Rightarrow (Gu)(t) = 0 \quad \text{kaikilla} \quad t < t_0$$

jokaisella $t_0 \in \mathbf{R}$. Aikainvariantissa tapauksessa on luonnollisesti riittävää vaatia ehdot pelkästään tapauksessa $t_0 = 0$.

Pelkästään lineaarinen, aikainvariantti ja kausaalinen musta laatikko G on erittäin yleinen objekti, eikä siitä voida sanoa kovin paljoa sovellutuksien kannalta relevanttia. Tilanne muuttuu olennaisesti, jos tiedetään että pienet muutokset sisäänmenevässä signaalissa u aiheuttavat vain pieniä muutoksia ulostulevassa signaalissa Gu. Tällöin G olisi siis jossain mielessä jatkuva kuvaus. Niinpä tarvitaan jonkinlainen määritelmä sille, mitä pienellä muutoksella tarkoitetaan. Varsin yleinen tapa on normittaa signaalien vektoriavaruus $C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ neliösumman mielessä

$$||u||^2_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} := \int_{-\infty}^{\infty} ||u(t)||^2_{\mathbf{C}^m}\, dt,$$

jossa $||u||^2_{\mathbf{C}^m} := \sum_{j=1}^m |u_j|^2$. Tämä normin valinta on matemaattisesti miellyttävää, koska se antaa signaaliavaruudelle $C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$ sisätuloavaruuden rakenteen. Fysikaalisesti $L^2(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$-normi vastaa signaalin kokonaisenergiaa. Mikäli on olemassa vakio $C < \infty$ siten että kaikilla $u \in C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^m)$

$$||Gu||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^p)} \leq C||u||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)} \tag{1}$$

sanotaan että G:llä on *äärellinen energiavahvistus*, ja että se on *input/output-stabiili* tai lyhyemmin *I/O-stabiili.* G:lle määritellään normi asettamalla

$$||G||_\infty = \sup_{||u||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)}=1} ||Gu||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^p)}. \tag{2}$$

Oltaisiin luonnollisesti voitu käyttää erilaisia painofunktioita $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C}^m)$-normin määrittelyssä, jolloin oltaisiin saatu suurempia luokkia "stabiileja" mustia laatikoita.

Huomattakoon ettei ole olemassa mitään yksittäistä universaalia tapaa määritellä mitä "pieni muutos" signaalissa u tarkoittaa, koska pieni muutos saattaa olla toisessa merkityksessä hyvinkin iso. Tästä voidaan antaa esimerkki:

Esimerkki 2. *Olkoon $h > 0$ mielivaltaisen pieni. Tällöin on olemassa signaali $u \in C(\mathbf{R};\mathbf{C})$ signaali siten että h:n kokoinen viive vie sen kakkosen päähän itsestään supremum-normin mielessä*

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} |(\tau^h u)(t) - u(t)| = 2. \tag{3}$$

Ota esimerkiksi $u(t) = \sin(t\log(|t|+1))$. Intuitiivisesti olisi kuitenkin kohtuullista ajatella, että mielivaltaisen pienet viiveet eivät voi edustaa suuria muutoksia. Onkin totta, että jos vaadimme lisäksi, että $u \in C_0(\mathbf{R};\mathbf{C}^n)$, tällöin yhtälön (3) supremum-lauseke $\to 0$ kun $h \to 0$. Samoin, jos oletamme että $||u||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C})} < \infty$, niin silloin jopa

$$\lim_{|h|\to 0} ||\tau^h u - u||_{L^2(\mathbf{R};\mathbf{C})} = 0.$$

Olkoon G nyt lineaarinen, aikainvariantti, äärellisesti energiaa vahvistava musta laatikko. Tulee huomata, että mustan laatikon sisäistä kompleksisuutta ei ole rajoitettu millään tavalla. Esimerkiksi jos kyseessä olisi täysin lineaarisista komponenteista koottu lineaarinen vahvistin (oikeammin: sellaisen vahvistimen input/output-kuvaus), sen komponenttien lukumäärää ei olisi mitenkään rajoitettu — siinäkään tapauksessa, että laitteesta ei voitaisi ottaa pois yhtäkään komponenttia input/output-kuvausta muuttamatta. Itseasiassa, eräässä mielessä "komponenttien" lukumäärä voisi olla ääretön. Voitaisiin antaa vaikkapa lämmönjohtuvuusyhtälöön perustuva esimerkki, jossa jokaiseen avaruuden matemaattiseen pisteeseen liittyisi infinitesimaalisen pieni "komponentti". Tällöin olemme tekemisissä *ääretönulotteisien systeemien* ja nk. *jakautuneiden järjestelmien* kanssa, mutta emme käsittele niitä näillä luennoilla.

2.2 Mustan laatikon sisäisestä rakenteesta

Tarkastelemme seuraavassa erästä useissa sovellutuksissa ensiarvoisen tärkeää käytännön tehtävää, nimittäin mustan laatikon avaamista. Tämän tehtävän ratkaisu on selvästi apriorinen mahdottomuus[1], ja niinpä sen tutkimiseen on käytetty säästelemättä henkisiä, rahallisia ja materiaalisia resursseja. Tämä on tietenkin inhimillisesti ottaen täysin ymmärrettävää, koska tehtävän onnistuneesti ratkaissut voi aivan perustellusti odottaa rikastuvansa esim. osake- ja johdannaismarkkinoilla huomattavan nopeasti.

Lineaarisen mustan laatikon "avaamiseen" on kehitetty koko joukko menetelmiä, jotka kuuluvat nk. *systeemi-identifikaatioteorian* piiriin. Nimi viittaa siihen, että ikään kuin mustan laatikon sisältä haluttaisiin "identifioida" systeemi, joka on sinne piilotettuna ja jota emme pelkästään käytännöllisistä syistä pysty suoraan näkemään.

Kaikissa systeemi-identifikaatiomenetelmissä mustaan laatikkoon syötetään erilaisia signaaleita, valkoista kohinaa tms.. Ulostuloa havaitsemalla pyritään rakentamaan matemaattisia malleja, jotka selittäisi jossain mielessä optimaalisesti havaitun käytöksen. Käytetyt matemaattiset mallit ovat yleensä (stokastisen tai tavanomaisen) differentiaaliyhtälön muotoa, josta esimerkkinä yhtälö

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad \text{kaikilla} \quad t \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{4}$$

joka tulee meille hyvin tutuksi myöhemmin. Kaavassa (4) A, B, C ja D ovat sopivia lineaarisia kuvauksia sopivissa vektoriavaruuksissa. Yhtälöä (4) kutsutaan G:n *tila-avaruusmalliksi* tai *reaalisaatioksi*, mikäli $y = Gu$ jos ja vain jos u ja y toteuttavat yhtälön (4). Palaamme tarkemmin tähän myöhemmin.

Ei pidä kuitenkaan luulla, että musta laatikko G olisi "oikeasti" avattu vaikka sen edustama input/output -kuvaus voitaisiinkin virheettömästi selittää erään muotoa (4) olevan differentiaaliyhtälön avulla.

Tehtävä 3. *Osoita esimerkillä, että lineaarinen, aikainvariantti musta laatikko saattaa koostua aikainvarianteista, mutta aidosti epälineaarisista komponenteista. Onko mahdollista rakentaa epälineaarinen musta laatikko, lineaarisista komponenteista?*

[1]Jos musta laatikko voitaisiin avata, se ei olisi musta.

Itse asiassa sähköinsinöörit ovat kautta aikojen (tai ainakin viime vuosisadalla) pyrkineet rakentamaan lineaarisia laitteita epälineaarisista komponenteista, ja he ovat olleet siinä huomattavan menestyksekkäitä. Niinpä reaalisaation (4) rakenteella (joka viime kädessä palautuu lineaaristen kuvausten A, B, C ja D rakenteeseen) ei tarvitse olla mitään tekemistä mustan laatikon sisuskalujen kanssa. Siitä huolimatta reaalisaatiosta saattaa olla huomattavasti käytännön hyötyä, koska sitä voidaan manipuloida matemaattisesti helpommin kuin pelkkää kokoelmaa mustasta laatikosta saatua mittausdataa. Voisi sanoa että reaalisaatio on käyttökelpoinen tapa kompressoida mittausdataa.

Eräissä tapauksissa meillä on fysikaalisesti perustellut syyt olettaa, että G:n sisäinen rakenne on itse asiassa differentiaaliyhtälön (4) muotoa. Tällöin G ei tarkkaan ottaen ole musta laatikko. Esimerkkinä annettakoon lämmönjohtumistehtävä levyssä $L := \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad 0 < u, v < 1\}$, jota lämmitetään osalta reunaa (input) ja lämpötilaa mitataan toiselta osalta reunaa (output). Levy L koostuu sekalaisesta aineesta, ja lämmönjohtumiskerroin on siis paikan funktio. Levyn lämpötilajakaumaa $x(t, u, v)$ mallitetaan lämpöyhtälöllä

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, u, v) = \nabla \cdot (\sigma(u, v)\nabla)\, x(t, u, v) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad 0 < u, v < 1.$$

Tässä $\sigma(u, v)$, $(u, v) \in L$, on tuntematon lämmönjohtavuusjakauma, ja B on tunnettu reunakontrollioperaattori. Malli on yhtälön (4) muotoa ja tunnettu muutoin, paitsi funktion $\sigma(u, v)$ osalta. Funktion $\sigma(u, v)$ konstruoiminen reunakontrollista u ja mittausdatasta on nk. *käänteinen ongelma.*

Tehtävä 4. *Ajatellaan ideaalisia radio- ja televisiovastaanottimia*[2] *Olemme pelkästään kiinnostuneita antennista tulevan input-signaalin ja kaiuttimista tai kuvaputkesta tulevan output-signaalin välisestä suhteesta, jota pidämme mustana laatikkoina R ja T. Tarkastele, missä mielessä R, T ovat lineaarisia, aikainvariantteja, ja onko niillä äärellinen energiavahvistus. Voidaanko R ja T koota pelkästään lineaarisista komponenteista?*

2.3 Säätö takaisinkytkennällä

Kahdesta mustasta laatikosta G_1 ja G_2 on helppoa rakentaa kolme muuta rinnan ja sarjaankytkemällä, mikäli vektoriarvoisten signaalien dimensiot sen

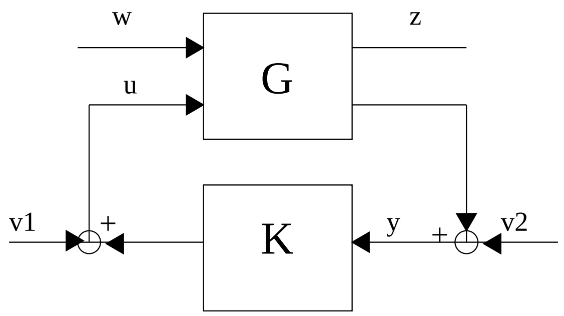
[2] Ei kuitenkaan mitään digivastaanottimia, ja oletamme että ne ovat olleet aina olemassa ja päällä. Ideaalisuus ymmärretään niin, että laitteiden oletetaan toimivan täsmälleen spesifikaatioidensa mukaisesti, vaikka ohjelma olisikin huonoa. Meidän ei ole tarpeen tuntea näitä spesifikaatioita tarkalleen.

vain sallivat. Kyseessä on itse asiassa vain kuvausten yhteenlasku $G_1 + G_2$ ja kompositiot G_1G_2 sekä G_2G_1, jossa tarvitsee vain huolehtia siitä ko. operaatiot ovat matemaattisesti järkeviä. Selvästi, mikäli G_1 ja G_2 ovat molemmat lisäksi lineaarisia (aikainvariantteja), niin on myös $G_1 + G_2$ ja G_1G_2 sekä G_2G_1.

Hieman mielenkiintoisempaan rakenteeseen pääsemme käsiksi tarkastelemalla *takaisinkytkentöjä*. Takaisinkytkentä tarkoittaa luonnollisesti sitä, että osa laatikon ulostulosta kytketään tiettyjen muunnosten jälkeen takaisin laatikon sisääntuloon. Takaisinkytkennän käyttö tekniikan säätötarkoituksissa lienee ikivanhaa, ja jo höyrykoneiden aikakaudella mekaanisten takaisinkytkentäsäätäjien (regulaattoreiden) käyttö oli oma taiteenlajinsa. Samalla periaatteella toimivat mm. mekaaniset sytytysennakon säätäjät auton moottoreissa.

Tieteellisemmälle pohjalle takaisinkytkentäajattelua oli nostamassa 1940-luvulla mm. N. Wienerin koulukunta. Silloin kehittyi *kybernetiikaksi* nimetty tieteenhaara. Kybernetiikan uskottiin olevan ratkaisu biologian ja älyn ongelmiin, mutta asiat osoittautuivat myöhemmin jonkin verran komplisoituneemmiksi. Wiener on kirjoittanut näistä tapahtumista kirjan, josta käy ilmi se innostus, joka tutkijapiireissä oli vallalla niihin aikoihin.

Olkoon G ja K lineaarisia mustia laatikoita. Ajatellaan G:n vektoriarvoiset sisääntulo ja ulostulo jaetuksi kahdeksi signaaliksi siten, että seuraavan diagrammin ympyrällä merkityt summausliitokset ovat järkeviä. Summausliitoksiin sekä mustiin laatikoihin tulevat nuolet osoittavat signaalin kulkusuuntaa.



Kyseessä on selvästi takaisinkytkentä, jossa osa G:n ulostulosta on kytketty *säätäjän* K kautta osaan sisäänmenoja. Signaalit v_1 ja v_2 ovat *ulkoisia häiriösignaaleja*. Käytännössä on aika paljon vaadittu, että nämä ulkoiset häiriösignaalit olisivat jatkuvia, mutta oletettakoon kuitenkin niin. Hajottamalla G 2×2-lohkomatriisiksi signaalien hajotelman mukaan, saadaan

$$\begin{bmatrix} z \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Käyttämällä summausliitosten yhtälöitä

$$\begin{cases} y = z_2 + v_2, \\ u = Ky + v_1. \end{cases}$$

saadaan

$$\begin{bmatrix} I & -G_{12} & 0 \\ 0 & I & -K \\ 0 & -G_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ G_{21} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Vahvempien oletusten vallitessa yhtälön vasemmalla puolella oleva lohkomatriisin määrittämä lineaarikuvaus on kääntyvä jatkuvien signaalien avaruudella. Tällöin signaalit z, u ja y saadaan lausuttua signaalien w, v_1 ja v_2 avulla. Tämä kuvaus on eräänlainen "musta laatikko" sekin, paitsi että tiedämme sen sisäisestä rakenteesta sen olevan *suljetun loopin* muotoa eräälle takaisinkytkentäjärjestelylle. On selvää että kyseessä on lineaarinen (aikainvariantti) musta laatikko, mikäli molemmat G ja K ovat lineaarisia (aikainvariantteja).

Tehtävä 5. *Laske kuvauksen* $[w \quad v_1 \quad v_2] \mapsto [z \quad u \quad y]$ *lohkomatriisiesitys lineaarisessa tapauksessa, olettaen että* $G_{22} = 0$. *Entä jos* $G_{22} \neq 0$*?*

Määritelmä 6. *Olkoon G ja K lineaarisia, aikainvariantteja mustia laatikoita, joille yllä oleva suljetun loopin kaavio on määritelty. Mikäli kuvaus* $[w \quad v_1 \quad v_2] \mapsto [z \quad u \quad y]$ *on I/O-stabiili kaavan (1) mielessä, sanotaan että K on* stabiloiva säätäjä *G:lle.*

Stabilointitehtäväksi kutsutaan kaikkien stabiloivien säätäjien K joukon parametrisointia[3] yhtälön (5) mukaan lohkotulle G:lle. Ratkaisemme tämän tehtävän myöhemmin äärellisdimensioisten systeemien tapauksessa.

Erityisen kiinnostava on se lineaarinen kuvaus G_K, joka kuvaa $w \mapsto z$. Suoralla laskulla saadaan

$$G_K = G_{11} + G_{12}K\left(I - G_{22}K\right)^{-1} G_{21},$$

[3]Parametrisointi tarkoittaa intuitiivisesti jonkin matemaattisesti järjellisen joukon P keksimistä, ja sellaisen (jatkuvan) bijektion ϕ löytämistä joukolla P, jolla $\phi(P)$ on täsmälleen haluttujen säätäjien joukko.

olettaen että $I - G_{22}K : C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p_2}) \to C(\mathbf{R}; \mathbf{C}^{p_2})$ on bijektio.

Olkoon lineaarinen ja aikainvariantti G yhtälön (5) mukaan lohkotussa muodossa. *Standarditehtäväksi* tai *nelilohko-ongelmaksi (Four block problem)* kutsutaan sellaisen stabiloivan säätäjän K löytämistä, jolle yhtälön (2) antama normi $||G_K||_\infty$ on pienin mahdollinen.

Suboptimaalisesta tehtävästä puhutaan silloin, kun tehtävänä on parametrisoida kaikki stabiloivat säätäjät K, joille $||G_K||_\infty < \gamma$, missä $\gamma > 0$ on ennalta annettu vakio. Ratkaisemme tämän tehtävän myöhemmin äärellisdimensioisten systeemien tapauksessa, skalaarisignaaleilla.

(**1. luento v. 2002 päättyi tähän**)