Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.163 Siirtofunktioiden perusteet, kevät 2002 **Malinen**

(i) Määritellään operaattorit $\pi_+ : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ ja $\pi_- : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ asettamalla

$$(\pi_+ f)(t) = \begin{cases} f(t), \text{ jos } t \geq 0 \\ 0, \text{ jos } t < 0, \end{cases} \quad \text{ja } (\pi_- f)(t) = \begin{cases} 0, \text{ jos } t \geq 0 \\ f(t), \text{ jos } t < 0. \end{cases}$$

Osoita että π_+ ja π_- ovat ortogonaaliprojektioita. Määritellään niiden taajuustason vastineet $\hat{\pi}_+ := \mathcal{F}\pi_+\mathcal{F}^{-1}$ ja $\hat{\pi}_- := \mathcal{F}\pi_-\mathcal{F}^{-1}$, jossa $\mathcal{F}$ on (L^2-)Fourier-muunnos. Osoita, että nekin ovat ortogonaaliprojektioita, mutta avaruudessa $L^2(i\mathbf{R})$.

(ii) Olkoon $\hat{F} \in RL^\infty(i\mathbf{R})$. Osoita, että $(M_{\hat{F}})^* = (M_{\hat{F}^*})$, jossa

$$\left(M_{\hat{F}}\hat{u}\right)(i\omega) = \hat{F}(i\omega)\hat{u}(i\omega), \quad i\omega \in i\mathbf{R}$$

on nk. multiplikaatio-operaattori $M_{\hat{F}} : L^2(i\mathbf{R}) \to L^2(i\mathbf{R})$, ja

$$\hat{F}^*(i\omega) = \hat{F}(i\omega)^* = \overline{\hat{F}(i\omega)}^T, \quad i\omega \in i\mathbf{R}.$$

(Kyseessä on siis operaattorin $M_{\hat{F}}$ Hilbert-avaruus-adjungaatin laskeminen.)

(iii) Olkoon $K \in L^1(\mathbf{R})$. Osoita että konvoluutio-operaattorin $f \mapsto K * f$,

$$(K * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s)f(s)\,ds,$$

adjungaatti on konvoluutio-operaattori $f \mapsto \tilde{K} * f$, jossa $\tilde{K}(s) := \overline{K(s)}^T$. (Vihje: vaihda integroimisjärjestystä. Riittää tutkia sisätuloa $\langle f, K * g\rangle$ jossa f ja g ovat jatkuvia ja kompaktikantajaisia. Miksi?)

(iv) Olkoon V, W, X, Y Hilbert-avaruuksia, ja $A : V \to W$, $B : W \to X$, $C : X \to Y$ ja $D : Y \to V$ rajoitettuja lineaarioperaattoreita. Osoita että operaattoreilla A^*A ja AA^* on samat **nollasta poikkavat** ominaisarvot. Anna esimerkki, että nolla voi olla toisen ominaisarvo, ilman että on toisen. Osoita edelleen, että operaattoreilla $DCBA$, $ADCB$, $BADC$ ja $CBAD$ on samat **nollasta poikkavat** ominaisarvot. Kuinka vastaavat ominaisvektorit suhtautuvat toisiinsa?