Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.163 Siirtofunktioiden perusteet, kevät 2002 **Malinen**
1. kotitehtävän palautus viimeistään 31. tammikuuta 2002 klo. 16.00

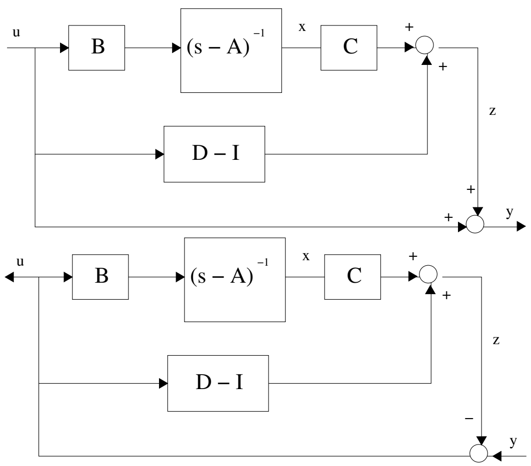
(i) Tee lineaarisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ eli

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

tila-avaruuteen muuttujanvaihto sijoittamalla $z(t) = V^{-1}x(t)$ jossa V on kääntyvä neliömatriisi. Osoita että saadun systeemin Σ_V siirtofunktio on riippumaton V:stä.

Systeemistä tulee erityisen yksinkertainen jos V valitaan siten että $J := V^{-1}AV$ on matriisin A Jordanin muoto. Laske e^{tJ} kun $t \geq 0$ ja $(s - J)^{-1}$ kun $s \notin \sigma(J)$. Osoita, että $||e^{tJ}|| \leq C < \infty$ kaikilla $t \geq 0$ mikäli $\sigma(J) \subset \mathbf{C}_- := \{z \in \mathbf{C} \quad | \quad \Re z < 0\}$. Osoita, että itse asiassa $||e^{tJ}||$ konvergoi tällöin nollaan eksponentiaalisella nopeudella kun $t \to \infty$.

(ii) Olkoon $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ systeemi jolle D on kääntyvä neliömatriisi. Tällöin sisääntuloavaruuden ja ulostuloavaruuden dimensiot ovat siis yhtäsuuret ($p = m$). Tarkastellaan seuraavia takaisinkytkentäjärjestelyjä



Merkitään saatuja siirtofunktioita $G_1(\cdot)$ ja $G_2(\cdot)$. Osoita että kaikille $s \notin \sigma(A)$ pätee $G_2(s) = G_1(s)^{-1}$. Siirtofunktion pisteittäinen invertoiminen on siis ekvivalenttia erään takaisinkytkennän kanssa. Kirjoita $G_2(s) = D^x + B^x(s - A^x)^{-1}C^x$ sopiville matriiseille A^x, B^x C^x ja D^x, jotka on lausuttu alkuperäisten A, B, C ja D avulla. Entä jos $D = I$?

(iii) Olkoon kaksi lineaarista systeemiä $\Sigma_1 = \left[\begin{smallmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\Sigma_2 = \left[\begin{smallmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{smallmatrix}\right]$ annettu. Laske siirtofunktion lauseke kun systeemit on a) rinnakkaiskytketty, b) sarjaankytketty. Systeemien dimensiot oletetaan sellaisiksi, että ko kytkennät ovat hyvin määriteltyjä. Anna kaavat myös systeemien impulssivasteille.

(iv) Tässä esimerkissä tutkitaan Laplace-muuntuvia, skalaariarvoisia signaaleja $u \in C^n(\mathbf{R}_+)$ ja $y \in C^n(\mathbf{R}_+)$. Oletetaan että näiden signaalien välinen riippuvuus on annettu differentiaaliyhtälöllä

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} b_j u^{(j)}.$$

Osoita että kuvaus $G_+ : u \mapsto y$ on lineaarinen, kausaalinen ja aikainvariantti. Anna kuvauksen G_+ liittyvän siirtofunktion lauseke. Osaatko realisoida tämän siirtofunktion erään lineaarisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktiona?