Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Somersalo / Perkkiö

Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2

2. välikoe 26.3.2001

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi -kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Laske puolipallon kuoren

$$\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid x^2+y^2+z^2 = 4\ ,\ \ z \geq 0\ \}$$

   ja kartion vaipan

$$\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \sqrt{x^2+y^2} + z = 2\ ,\ \ z \geq 0\ \}$$

   väliin jäävän kappaleen tilavuus.

2. Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

   a) Onko $\mathbf{F}$ konservatiivinen?

   b) Laske viivaintegraali

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

   kun $\mathcal{C}$ on $(0,0,1)$-keskisen ympyrän lyhempi kaari, joka yhdistää pisteen $(1,0,1)$ pisteeseen $(0,1,1)$.

3. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F} = z^2 \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

   vuo origokeskisen yksikköpallon pinnan läpi ulospäin.

4. a) Olkoon $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} - 3xyz\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. Laske $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja $\nabla \times \mathbf{F}$.

   b) Olkoon $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Laske $\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r})$, missä $\mathbf{c}$ on vakiovektori.