Teknillinen korkeakoulu Somersalo/Bingham

Mat-1.322 Matematiikan peruskurssi S 2

Tentti 22/05/1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:

1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;

2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;

3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);

4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;

5) nimikirjoitus.

1. Osoita, että pisteen $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 1)$ ympäristössä muuttujat y ja v voidaan ratkaista muuttujien x ja v funktioina $y = y(x, v)$, $u = u(x, v)$ yhtälöistä

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + u^2 + v^2 &= 2 \\ x + 2y + 3u + 4v &= 6, \end{aligned}$$

ja laske

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$$

pisteessä $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 1)$.

2. Laske integraali

$$\int_0^1 dx \int_x^{x^{1/3}} \sqrt{1 - y^4}\, dy.$$

Hahmottele integroimisalue.

3. Esitä Stokesin lause (ilman todistusta).

Käyttämällä Stokesin lausetta näytä, että

$$\oint_C y dx + z dy + x dz = \sqrt{3}\pi a^2,$$

missä C on pintojen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja $x + y + z = 0$ leikkauskäyrä sopivasti suunnistettuna. Mitä vaikutusta suunnistuksen valinnalla on integraalin arvoon?

4. Olkoon $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ mielivaltainen vektorikenttä ja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Osoita, että seuraavat identiteetit pätevät:

$$(\vec{u} \times \nabla) \cdot \vec{r} = 0, \quad (\vec{u} \times \nabla) \times \vec{r} = -2\vec{u}.$$

5. Johda ensimmäisen kertaluvun tavallisen differentiaaliyhtälön integroivan tekijän kaava, ja selitä, miten ratkaistaan yhtälö

$$y' + a(x)y = f(x).$$

Pelkkä ulkoa opeteltu kaava ei riitä.

Sovellus: Ratkaise $y = y(x)$, joka toteuttaa yhtälön

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = x, \quad |x| < 1.$$