Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Somersalo / Weikkolainen / Perkkiö

Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2

Tentti 18.5.2001

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi -kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 4h.

1. Hae funktion $f(x,y,z) = e^z \sin(xy)$
   (a) gradientti pisteessä $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.
   (b) suunnattu derivaatta pisteessä $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$ origon suuntaan.

2. Osoita, että yhtälöpari
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 4 \end{cases}$$
   määrittelee pisteen $(0,0,1)$ jossain ϵ-ympäristössä käyrän $z = z(x), y = y(x)$.

3. Tarkastellaan integraalia
$$\iint_G \frac{\tan\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dA \qquad , \qquad G = \{\ (x,y) \mid 4(x^2+y^2) \leq \pi^2\ \}.$$
   (a) Onko integraali epäoleellinen? Perustelut.
   (b) Laske integraali. Jos integraali on epäoleellinen, niin riittää osoittaa, että se joko suppenee tai hajaantuu.

4. Olkoon $\mathbf{F}(x,y) = (e^y + x)\mathbf{i} + (\sin x + y)\mathbf{j}$. Laske vuointegraali $\int_C \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{r}} ds$, missä C on koordinaattineljännekseen $x \geq 0$, $y \geq 0$ jäävä origokeskisen yksikköympyrän kaari ja $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. (*Vihje:* Divergenssilause tasossa.)

5. Ratkaise differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä
$$yy' = e^{y-2x}, \quad y(0) = 1.$$

6. Tutki, suppeneeko sarja
$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n+2} \left(\frac{1}{n-\sqrt{2}} - \frac{1}{n+\sqrt{2}} \right).$$
   Perustele johtopäätöksesi.