Teknillinen korkeakoulu Somersalo

Mat-1.322 Matematiikan peruskurssi S 2

Tentti 04/11/1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:

1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;

2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;

3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);

4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;

5) nimikirjoitus.

1. Vektorikentät $\vec{E}(x,y,z)$ ja $\vec{H}(x,y,z)$ toteuttavat ylemmässä puoliavaruudessa $z > 0$ yhtälön $\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H}$, missä $\omega > 0$ ja $\mu_0 > 0$ ovat vakioita, i on imaginaariyksikkö. Näytä, että jos $\vec{k} \times \vec{E}(x,y,0) = 0$, niin $\vec{k} \cdot \vec{H}(x,y,0) = 0$. Tässä $\vec{k}$ on z–akselin suuntainen yksikkövektori.

2. Olkoon $f(x,y)$ pisteen $(x,y) = (\pi,\pi)$ ympäristössä määritelty funktio,
$$f(x,y) = x^2\cos^2 y + e^{-y}(x\sin x - xy^2).$$
Määritellään uudet muuttujat ν ja μ kaavoilla
$$\nu = \nu(x,y) = x\ln x + x\sin y, \quad \mu = \mu(x,y) = y\ln y - y\cos x.$$
Laske funktion f osittaisderivaatat $\partial f/\partial\nu$ ja $\partial f/\partial\mu$ pisteessä $(\nu,\mu) = (\pi\ln\pi, \pi(\ln\pi + 1))$.

3. Määrää se pinnan $z = 2x^2 + xy + y^2$ piste, joka on lähimpänä tasoa $2x - 3y - z = 6$.

4. Laske vektorikentän $\vec{F}$ vuo yksikköpallon pinnan läpi, kun
$$\vec{F}(x,y,z) = (e^{-z}\sin y + xz^3)\vec{i} + (e^{-z}\cos x + 2yz^3)\vec{j} + (\frac{1}{4}z^4 + zxy)\vec{k}.$$

5. Laske viivaintegraali $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$, kun
$$\vec{F}(x,y) = x^2y^2\vec{i} - \frac{x}{y^2}\vec{j},$$
ja C on alueen R positiiviseen suuntaan suunnistettu reunakäyrä, ja
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge x\}.$$

6. Etsi yleinen ratkaisu $y = y(x)$, $x > 0$, yhtälölle
$$x^2y'' - xy' + y = 0.$$