Teknillinen korkeakoulu — Somersalo

Mat-1.322 Matematiikan peruskurssi S 2
Tentti 01/09/1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Osoita, että yhtälöt

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) &= x^2u + y\sin v, \\ G(x,y,u,v) &= x\cos u - xyv, \end{aligned}$$

määräävät implisiittisesti pisteen $(x,y,u,v) = (1,0,\pi,\pi)$ ympäristössä funktiot $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Laske myös

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v$$

tässä pisteessä.

2. Laske viivaintegraali $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

   (a) suoraan määritelmästä lähtien,

   (b) Greenin kaavan avulla,

   kun
$$\vec{F}(x,y) = (xy-2)\vec{i} + (xy^2+y)\vec{j},$$
   ja C on sen alueen positiivisesti suunnattu reunakäyrä, jota rajoittavat käyrät
$$y = 0, \quad y = x, \quad x = -y^2+2.$$

3. Laske tasoalueen

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0,\ 1\le xy\le 4,\ 1\le \frac{y}{x}\le 2\right\}$$

pinta–ala (u,v)–tasossa integroimalla, missä

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$$

4. Olkoon $\vec{F}(x, y, z)$ mielivaltainen vektorikenttä $\mathbb{R}^3$:ssa, $\vec{c}$ vakiovektori ja $u(x, y, z)$ skalaarifunktio, jolle pätee

$$\Delta u(x, y, z) = 4x^2 + xy \sin z,$$

missä Δ on Laplace–operaattori,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Määritellään vektorikenttä $\vec{G}(x, y, z)$ kaavalla

$$\vec{G}(x, y, z) = \nabla \times \vec{F}(x, y, z) + \nabla u(x, y, z) + \vec{c}.$$

Laske kentän $\vec{G}$ vuo origokeskisen yksikköpallon pinnan läpi (pallon sisältä ulospäin).

5. Etsi yleinen ratkaisu $y = y(x)$, $x > 0$, yhtälölle

$$x^2 y'' - xy' + y = 0.$$