Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2, kevät 2002 **Högnäs**
3. välikoe, ratkaisuja

1. Laske viivaintegraali
$$\oint_{\mathcal{C}} y^2\,dx - x^2\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$$
Stokesin lauseen avulla, kun $\mathcal{C}$ on ellipsi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ suunnistettuna siten, että käyrän projektio xy-tasolla kuljetaan negatiiviseen suuntaan.

   Ratkaisu. Laketaan siis viivaintegraali $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, missä $\mathbf{F} = y^2\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\,\mathbf{k}$. Stokesin lauseen mukaan
$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS,$$
missä $\mathcal{S}$ on sopivasti suunnistettu pinta jonka reuna on $\mathcal{C}$ ja $\hat{\mathbf{N}}$ on suunnistetun pinnan yksikkönormaali. Nyt
$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -2y\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} - (2x + 2y)\,\mathbf{k}.$$
Pinnaksi $\mathcal{S}$ voidaan valita elliptinen kiekko $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Tämä kiekko sijaitsee tasossa $x+y+z = 1$. Eräs sen normaaleja on $\nabla(x+y+z) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Nyt $\mathcal{C}$:n projektio xy-tasolle, joka on ympyrä $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, kuljetaan negatiiviseen suuntaan, joten täytyy valita $\mathcal{S}$:n suunnistus siten, että sen normaali osoittaa alaspäin. Siispä $\hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Näin ollen
$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = \frac{4}{\sqrt{3}}(x + y)$$
ja
$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\mathcal{S}} (x + y)dS = \frac{4}{\sqrt{3}}(\overline{x} + \overline{y}) \cdot \mathrm{area}(\mathcal{S}).$$
Mutta koska kiekon $\mathcal{S}$ painopiste $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, joka on samalla sen keskipiste, sijaitsee z-akselilla, on $\overline{x} = \overline{y} = 0$, joten saadaan
$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

2. Oletamme, että skalaarifunktiot $f(x, y, z)$ ja $g(x, y, z)$ ovat kahdesti jatkuvasti derivoituvia avoimessa joukossa, joka sisältää umpinaisen pinnan ∂V sekä tämän rajoittaman alueen V. Edelleen oletamme, että ∂V ja V ovat riittävän säännöllisiä.

Osoita kaavat

$$\iiint\limits_V \nabla f \cdot \nabla g \, dV + \iiint\limits_V f \nabla^2 g \, dV = \oiint\limits_{\partial V} f \nabla g \cdot d\mathbf{S} \qquad (\textbf{Greenin 1. kaava})$$

$$\iiint\limits_V \left(f\nabla^2 g - g \nabla^2 f \right) \, dV = \oiint\limits_{\partial V} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{S} \qquad (\textbf{Greenin 2. kaava})$$

Ratkaisu. (Greenin 1. kaava) Koska kaavan oikealla puolella on vektorikentän vuo läpi suljetun pinnan ja vasemmalla puolella on tilavuusintegraaleja, on luonnollista lähteä liikkeelle Gaussin lauseesta.

Lasketaan $\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g$. Vektorikentän divergenssi on siis vasemman puolen tilavuusintegraalien integrandien summa, joten kaava seuraa välittömästi Gaussin lauseesta.

(Greenin 2. kaava) Jos Greenin ensimmäisessä kaavassa vaihdetaan f ja g keskenään, saadaan

$$\iiint\limits_V \nabla f \cdot \nabla g \, dV + \iiint\limits_V g \nabla^2 f \, dV = \oiint\limits_{\partial V} g \nabla f \cdot d\mathbf{S}.$$

Vähentämällä tämä kaava Greenin 1. kaavasta saadaan Greenin 2. kaava.

3. Hae differentiaaliyhtälön

$$y' = \frac{x+y}{x} - \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$$

se ratkaisukäyrä, joka kulkee pisteen $(1, -1)$ kautta. Vastauksen saa ilmoittaa muodossa $f(x, y) = 0$.

Ratkaisu. Yhtälö voidaan kirjoittaa

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2}.$$

Se on siis homogeeninen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, ja voidaan asettaa $v = \frac{y}{x}$, jolloin $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xv) = v + xv'$. Saadaan siis yhtälö

$$v + xv' = 1 + v - \frac{1+v^2}{(1+v)^2},$$

ja sieventämällä

$$xv' = \frac{2v}{(1+v)^2}.$$

Tämä voidaan kirjoittaa

$$(v + 2 + \frac{1}{v}) \, dv = \frac{2}{x} \, dx.$$

Saadaan integroimalla

$$v^2 + 2v + \ln|v| = 2\ln|x| + C,$$

missä C on integrointivakio. Koska $y(1) = -1$, saadaan $v(1) = y(1)/1 = -1$, sekä sijoittamalla edelliseen yhtälöön $1 - 2 + 0 = 0 + C$, josta $C = -1$. Korvaamalla lisäksi v:n $\frac{y}{x}$:llä saadaan

$$\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + \ln\frac{|y|}{|x|^3} + 1 = 0.$$

(Tätä implisiittistä ratkaisua voisi tietysti tutkia perustellisemmin, mutta jätetään tähän.)

4. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

potenssisarjamenetelmällä.

Ratkaisu. Käytetään yritettä $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$. Koska tällöin $y(0) = a_0$, seuraa alkuehdosta $y(0) = 1$, että $a_0 = 1$. Siispä

$$y = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

sekä derivoimalla

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$$

Toinen alkuehto antaa nyt $0 = y'(0) = a_1$. Siispä

$$\begin{aligned} y &= 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \\ y' &= 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots \\ y'' &= 2a_2 + 6a_3x + \ldots \end{aligned}$$

Sijoittamalla tarkasteltuun differentiaaliyhtälöön saadaan

$$2a_2 + 1 + 6a_3x + (12a_4 + 3a_2)x^2 + \ldots + ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n)x^n + \ldots = 0$$

Tällöin täytyy vasemman puolen x:n potenssien kertoimien olla 0, jolloin saadaan $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 0$ ja $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Nähdään heti, että $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$. Lisäksi johdetaan $a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{1}{2\cdot 4}$, $a_6 = -\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}$, $a_8 = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \ldots$ Siispä $a_{2n} = (-1)^n\frac{1}{2^n n!}$. Tämä kaava pätee myös kun $n = 0$. Siispä

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$