Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2, kevät 2002 **Högnäs**
2. välikoe, ratkaisut

1. Tarkastamme integraalia

$$\int_C (3x-2y)\,dx + (y+2z)\,dy - x^2\,dz.$$

a) Kirjoita integraali muotoon $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (ts. hae $\mathbf{F}$). Onko $\mathbf{F}$ konservatiivinen? Myönteisessä tapauksessa hae potentiaalifunktio.
b) Laske integraali pitkin käyrää $\begin{cases} x = z^2 \\ z = y^2 \end{cases}$ pisteestä $(1,1,1)$ pisteeseen $(0,0,0)$.

Ratkaisu. a) Integraali voidaan kirjoittaa $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, missä

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x-2y)\,\mathbf{i} + (y+2z)\,\mathbf{j} - x^2\,\mathbf{k}.$$

Tämä vektorikenttä ei ole konservatiivinen, sillä esimerkiksi

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x-2y) = -2 \neq 0 = \frac{\partial}{\partial x}(y+2z).$$

b) Annetun käyrän yhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon $\begin{cases} x = y^4 \\ z = y^2 \end{cases}$. Pisteet $(x,y,z) = (1,1,1)$ ja $(x,y,z) = (0,0,0)$ toteuttavat nämä yhtälöt, eli ovat käyrällä. Asettamalla $y = t$ saadaan käyrälle parametriesitys $\mathbf{r}(t) = t^4\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$. Jotta suunnistus olisi oikea, eli jotta $y(t) = t$ vähenisi 1:stä 0:aan, täytyy antaa $t:\ 1 \to 0$. (Toinen tapa olisi asettaa $y = -t$ missä $t:\ -1 \to 0$ jolloin saadaan parametriesitys $\mathbf{r}(t) = t^4\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$.)

Saadaan $\mathbf{r}'(t) = 4t^3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, ja $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (3t^4 - 2t)\,\mathbf{i} + (t+2t^2)\,\mathbf{j} - t^8\,\mathbf{k}$, joten

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^0 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}(t)\, dt$$
$$= -\int_0^1 \left[(3t^4 - 2t)4t^3 + (t + 2t^2) \cdot 1 - t^8 \cdot 2t\right]\, dt$$
$$= -\int_0^1 (-2t^9 + 12t^7 - 8t^4 + 2t^2 + t)\, dt$$
$$= -\left(-\frac{2}{10} + \frac{12}{8} - \frac{8}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{15}.$$

2. Tarkastamme integraalia

$$\iint_G \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\, dA,$$

kun G on 2-säteisen ympyrän 4. kvadranttiin jäävä alue. Tiedämme, että $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, joten integraali on selvästi epäoleellinen. Suppeneeko se? (Integraalia ei tarvitse laskea, mikäli se suppenee.)

Ratkaisu. (Integraali on epäoleellinen, sillä $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, ja $\sqrt{x^2+y^2} > 0$ kun $(x, y) \neq (0, 0)$, jolloin

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty$$

Integrandi ei vaihda merkkiä alueessa G, sillä $\sin r \geq 0$ kun $0 \leq r \leq 2$, missä $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Alueen symmetrian ja integrandin muodon takia on edullista siirtyä napakoordinaatteihin, jolloin $dA = r\, d\theta\, dr$ ja aluetta

G vastaa alue $H = \{[r, \theta] \parallel 0 \leq r \leq 2, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi\}$. Saadaan

$$\begin{aligned}\iint_G \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,dA &= \iint_H \frac{\sin r}{r^2} r\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^2 \frac{\sin r}{r}\,dr \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^2 \frac{\sin r}{r}\,dr.\end{aligned}$$

Viimeinen integraali suppenee, sillä $\frac{\sin r}{r} \leq 1$ kun $r > 0$. (Lisäksi $\lim_{r\to 0} \frac{\sin r}{r} = 1$, eli singulariteetti $r = 0$ on poistuva.) Kaksoisintegraali suppenee siis (ja

$$\iint_G \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,dA \leq \frac{\pi}{2}\int_0^2 dr = \pi).$$

3. Laske

$$\iiint_E \left(1 - \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]\right) dV,$$

kun $E = \{(x, y, z) \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$. (Opastus: siirry aluksi uusiin muuttujiin u, v ja w siten, että $x = au$, $y = bv$ ja $z = cw$.)

Ratkaisu. Siirrytään siis koordinaatteihin u, v, w, missä $x = au$, $y = bv$ ja $z = cw$. Tällöin tullaan integroimaan yli yksikköpallon $S = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + z^2 \leq 1\}$, sillä

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 + z^2 \leq 1.$$

Lisäksi

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc,$$

joten $dV = |abc|\, du\, dv\, dw$. Saadaan

$$\iiint\limits_E \left(1 - \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]\right) dV$$
$$= |abc| \iiint\limits_S \left(1 - \left[u^2 + v^2 + w^2\right]\right) du\, dv\, dw.$$

Koska alue S on pallo, siirrytään nyt pallokoordinaatteihin ρ, ϕ, θ, jolloin $du\, dv\, dw = \rho^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho$, ja $u^2 + v^2 + w^2 = \rho^2$, ja

$$\iiint\limits_S \left(1 - \left[u^2 + v^2 + w^2\right]\right) du\, dv\, dw$$
$$= \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\phi \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)\rho^2 \sin\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^1 (\rho^2 - \rho^4)\, d\rho \int_0^\pi \sin\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 [-\cos\phi]_0^\pi = 2\pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{5})(-(-1) + 1) = \frac{8\pi}{15},$$

joten

$$\iiint\limits_E \left(1 - \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]\right) dV = \frac{8}{15}\pi|abc|.$$

(Saa kyllä olettaa, että $a, b, c > 0$ jos haluaa.)

4. Laske pintaintegraali

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\, dS,$$

jossa $\mathcal{S}$ on kartion $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ tasojen $z = 0$ ja $z = -3$ väliin jäävä osa. Fysikaalinen tulkinta?

Ratkaisu. Kartion yhtälö voidaan sylinterikoordinaateissa kirjoittaa $z^2 = 3r^2$. Kyseisessä alueessa $z \leq 0$, ja tämä osa kartiosta voidaan kirjoittaa

$z = -\sqrt{3}r$. Kun $-3 \leq z \leq 0$ kartiolla on siis $\sqrt{3} \leq r \leq 0$. Saadaan pinnalle parametriesitys

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = -\sqrt{3}r \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Pintaelementti $dS = 2r\,d\theta\,dr$ voidaan määrätä geometrian perusteella, tai laskemalla

$$\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)^2}\,d\theta\,dr$$
$$= \sqrt{3r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta + r^2} = 2r\,d\theta\,dr.$$

Siispä

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\,dS = \iint_{\substack{0\leq r\leq\sqrt{3}\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} r^2 \cdot 2r\,d\theta\,dr$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = 9\pi.$$

Olkoon pinnalla $\mathcal{S}$ olevan massan pintatihey vakio σ. Koska $r = \sqrt{x^2+y^2}$ on pisteen (x,y,z) etäisyys z-akseliin on $I_z = \delta\iint_{\mathcal{S}}(x^2+y^2)\,dS$ kyseisen pintamassan hitausmomentti z-akselin suhteen.