Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Weikkolainen/Somersalo/Högnäs

Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2

2. välikoe 25.03.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

1. Tarkastamme integraalia

$$\int_{\mathcal{C}} (3x - 2y)\, dx + (y + 2z)\, dy - x^2\, dz.$$

a) Kirjoita integraali muotoon $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (ts. hae $\mathbf{F}$). Onko $\mathbf{F}$ konservatiivinen? Myönteisessä tapauksessa hae potentiaalifunktio.

b) Laske integraali pitkin käyrää $\begin{cases} x = z^2 \\ z = y^2 \end{cases}$ pisteestä $(1, 1, 1)$ pisteeseen $(0, 0, 0)$.

2. Tarkastamme integraalia

$$\iint\limits_G \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}\, dA,$$

kun G on 2-säteisen ympyrän 4. kvadranttiin jäävä alue. Tiedämme, että $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, joten integraali on selvästi epäoleellinen. Suppeneeko se? (Integraalia ei tarvitse laskea, mikäli se suppenee.)

3. Laske

$$\iiint\limits_E \left(1 - \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right)\right) dV,$$

kun $E = \{(x, y, z) \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$. (*Opastus:* Siirry aluksi uusiin muuttujiin u, v ja w siten, että $x = au$, $y = bv$ ja $z = cw$.)

4. Laske pintaintegraali

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\, dS,$$

jossa $\mathcal{S}$ on kartion $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ tasojen $z = 0$ ja $z = -3$ väliin jäävä osa. Fysikaalinen tulkinta?