Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Somersalo/Weikkolainen/Perämäki

Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2

2. välikoe 24.03.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Laskimen käyttö on sallittu.

1. **Käyttäen Lagrangen kerroinmenetelmää** etsi yhtälön

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

määräämän tasokäyrän suurin ja pienin etäisyys origosta.

2. (a) Edellisen tehtävän yhtälö määrää pisteen $(x, y) = (1, 0)$ eräässä ympäristössä implisiittifunktion $y = y(x)$. Laske implisiittistä derivointia käyttäen tämän funktion derivaatta mainitussa pisteessä.

(b) Osoita, että yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 - u = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 - 3v = 0 \end{cases}$$

määrää pisteen $(x, y, u, v) = (1, 1, 5, 5/3)$ eräässä ympäristössä implisiittifunktiot $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$.

3. Laske avaruusintegraali

$$\iiint_G x \, dV \,,$$

kun $G = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \,,\ x \geq 0 \,,\ y \leq 0 \,,\ z \geq 0\}$.

4. Olkoon $R = \{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 1 \,,\ 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1] \times [0, 1]$. Suppeneeko vai hajaantuuko integraali

$$\iint_R \frac{1}{1 - xy} \, dA \; ?$$

Esitä tarkat perustelut!
(Opastus: tarkastele aluksi aluetta $R_\epsilon = [0, 1 - \epsilon] \times [0, 1]$.)
(Aputulos: $\displaystyle\int \ln(1 - x) \, dx = (x - 1) \ln(1 - x) - x + C$.)