Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2, kevät 2002 **Högnäs**
1. välikoe

1. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 5^{2n}}{(2n)!}, \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Ratkaisu. (a) Sarjan termi on siis $a_n = n^2 5^{2n}/(2n)!$, ja sarja on positiivinen. Jos se suppenee, se suppenee siis itseisesti. Suppenemista voidaan tässä tapauksesssa tutkia suhdetestillä.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2 5^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\frac{n^2 5^{2n}}{(2n)!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{5^{2n+2}}{5^{2n}} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{25(1+\frac{1}{n})^2}{2n+2)(2n+1)} \to 0.$$

kun $n \to \infty$. Sarja *suppenee* siis *itseisesti.*

(b) Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ on alternoiva ja $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ kun $n \to \infty$. Meillä on myös

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \ln x\right),$$

joka on < 0, kun $x > e^2$. Siispä $\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} < \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Nämä huomiot takaavat, että alternoiva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ *suppenee.*

Koska $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ kun $n \geq 3$ ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu, hajaantuu myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, mikä tarkoittaa, että alternoiva sarja *ei suppene itseisesti* eli se suppenee vain ehdollisesti.

2. Yhtälö $z = x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y$ määrää pinnan $\mathbb{R}^3$:ssa.

(a) Kirjoita pisteen $(x, y, z) = (1, 1, -6)$ kautta kulkevan tangenttitason yhtälö.

(b) Etsi ne pinnan pisteet, joissa tangenttitaso on horisontaalinen eli (x, y)-tason suuntainen.

Ratkaisu. (a) $z = f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y$. Tangenttitason yhtälö on

$$z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b).$$

Nyt $(a,b) = (x,y)$, $f_1(x,y) = 2x - 2y - 8$ ja $f_2(x,y) = -2x - 2y + 4$, jolloin saadaan $f(1,1) = -6$, $f_1(1,1) = -8$ ja $f_2(1,1) = 0$.

Tangenttitason yhtälö on siis $z = -6 + (-8)(x-1)$, eli

$$z = 2 - 8x.$$

(b) Tangenttitaso pisteessä (a,b) on horisontaalinen jos se on muotoa $z = vakio$, eli täsmälleen silloin kun $f_1(a,b) = f_2(a,b) = 0$. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2a & -2b & = & 8 \\ -2a & -2b & = & -4, \end{cases}$$

jonka (yksikäsitteinen) ratkaisu on $a = 3$, $b = -1$. Vastaava z-koordinaatti saadaan laskemalla $c = f(3,-1) = -14$. Piste jossa tason tangenttitaso on horisontaalinen on siis $(3,-1,-14)$.

Vaihtoehtoisesti voisi laskea seuraavasti:

Pinta on funktion $g(x,y,z) := f(x,y) - z$ tasa-arvopinta $g(x,y,z) = 0$, jolloin pinnan normaalin suunta pisteessä (a,b,c), missä $c = f(a,b)$, on $\nabla g(a,b,c) = f_1(a,b)\mathbf{i} + f_2(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Tangenttitaso koostuu siis niistä psteistä (x,y,z) joilla vektorit$(x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}$ ja $f_1(a,b)\mathbf{i} + f_2(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ovat kohtisuorat. Saadaan tangenttitason yhtälöksi $f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$. Tangenttitaso on horisontaalinen silloin kun $\nabla g(a,b,c) \parallel \mathbf{k}$, eli silloin kun $f_1(a,b) = f_2(a,b) = 0$.

3. Olkoon $f(x,y) = x^2 y - \ln y$.

   (a) Osoita, että pisteen $(x,y) = (0,1)$ ympäristössä yhtälö $f(x,y) = 0$ määrää implisiittifunktion $y = \phi(x)$.

   (b) Implisiittistä derivointia käyttäen etsi tämän funktion toisen asteen Taylorin polynomi pisteen $x = 0$ ympäristössä.

   Ratkaisu. (a) Funktiolla $f(x,y) = x^2 y - \ln y$ on jatkuvat osittaisderivaatat kun $y > 0$ ja $f(0,1) = 0$. Lisäksi $f_2(0,1) = x^2 - \frac{1}{y}|_{(x,y)=(0,1)} =$

$-1 \neq 0$. Yhtälö $f(x,y)=0$ määrää siis jatkuvasti derivoituvan implisiittifunktion $y\phi(x)$ pisteen $(0,1)$ ympäristössä.

(b) Derivaatalle ϕ' pätee

$$\phi'(x) = -\frac{f_1(x,\phi(x))}{f_2(x,\phi(x))} = -\frac{2x\phi(x)}{x^2 - \frac{1}{\phi(x)}} = -\frac{2x(\phi(x))^2}{x^2\phi(x)-1}$$

(Saadaan tunnetusta kaavasta tai derivoimalla yhtälö $f(x,\phi(x)) = 0$ (implisiittisesti) ketjusäännön avulla:

$$\frac{d}{dx} f(x,\phi(x) = f_1(x,\phi(x)) + f_2(x,\phi(x))\phi'(x),$$

josta yllä annettu kaava seuraa välittömästi.)

Saadaan $\phi'(0) = -\frac{2\cdot 0\cdot(\phi(0))^2}{0^2\phi(0)-1} = 0$

Nähdään myös, että derivointia voidaan jatkaa:

$$\begin{aligned}
\phi''(x) &= -\frac{d}{dx}\left(\frac{2x(\phi(x))^2}{x^2\phi(x)-1}\right) \\
&= -\frac{(2(\phi(x))^2 + 4x\phi(x)\phi'(x))(x^2\phi(x)-1) - 2x(\phi(x))^2(2x\phi(x) + x^2\phi'(x))}{(x^2\phi(x)-1)^2} \\
&= -\frac{1}{(x^2\phi(x)-1)^2}
\end{aligned}$$

joten $\phi''(0) = 2$. Näin voisimme jatkaa, eli ϕ:llä on nollan ympäristössä kaikkien kertalukujen derivaatat. Nyt kysyttiin kuitenkin vain astetta 2 olevaa Taylorin polynomia pisteessä $x = 0$ (eli ts. funktion Maclaurinin polynomia). Tämä on $p_2(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \frac{1}{2}\phi''(0)x^2 = 1 + x^2$.

4. Etsi **Lagrangen kerroinmenetelmää käyttäen** pinnan $x^2y - z^2 + 9 = 0$ pienin etäisyys origosta. (Tehtävässä ei vaadita tarkkaa perustelua sille, että kyseessä on todella globaali minimi.)

   Ratkaisu. Pitää siis minimoida $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ehdolla $g(x,y,z) := x^2y - z^2 + 9 = 0$. Nyt $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ saavuttaa miniminsä samassa pisteessä kuin $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$, joten ratkaistaan ongelma

   Minimoi $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ pinnalla $g(x,y,z) = x^2y - z^2 + 9 = 0$.

Tehtävänannon mukaan ei tarvitse todistaa, että (globaali) minimi on olemassa.

Olkoon $L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2y-z^2+9)$. Koska f:llä ja g:llä on kaikkialla jatkuvat osittaisderivaatat ja pinnalla $g(x,y,z) = 0$ ei ole "päätepisteitä", tiedetään, että kyseinen minimi saavutetaan joko Lagrangen funktion L kriittisessä pisteessä, tai pisteessä jossa $\nabla g = \mathbf{0}$. Mutta $\nabla g(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - 2z\mathbf{k} = \mathbf{0}$ vain jos $x = z = 0$, jolloin $g(x,y,z) = 9 \neq 0$, eli $\nabla g \neq \mathbf{0}$ pinnalla $g(x,y,z) = 0$. Minimi saavutetaan siis L:n kriittisessä pisteessä. Ratkaistaan systeemi

$$\begin{cases} L_1(x,y,z,\lambda) = 2x + 2\lambda xy) = 0 \\ L_2(x,y,z,\lambda) = 2y + \lambda x^2 = 0 \\ L_3(x,y,z,\lambda) = 2z - 2\lambda z = 0 \\ L_4(x,y,z,\lambda) = x^2y - z^2 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1+\lambda y) = 0 \\ y = -\frac{\lambda}{2}x^2 = 0 \\ (1-\lambda)z = 0 \\ x^2y - z^2 + 9 = 0 \end{cases}.$$

Kolmannesta yhtälöstä saadaan $\lambda = 1$ tai $z = 0$.

Jos $\lambda = 1$ saadaan toisesta yhtälöstä $y = -\frac{1}{2}x^2$ ja ensimmäisestä $x(1 - \frac{1}{2}x^2) = 0$, jonka ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = \pm\sqrt{2}$. Jos $x = 0$ on $y = 0$, ja viimeinen yhtälö antaa $z = \pm 3$. Saadaan pisteet $(0,0,\pm 3)$. Pätee $f(0,0,\pm 3) = 9$. Jos taas $x = \pm\sqrt{2}$ saadaan $y = -1$, jolloin, viimeisestä yhtälöstä, $z = \pm\sqrt{7}$. Pätee $f(\pm\sqrt{2}, -1, \pm\sqrt{7}) = 2 + 1 + 7 = 10 > 9$.

Jos $z = 0$ saadaan ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä $x(1 - \frac{1}{2}\lambda^2x^2) = 0$. Vaihtoehto $x = 0$ ei nyt käy, sillä neljännestä yhtälöstä saadaan tässä tapauksessa $x^2y + 9 = 0$. Siispä $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{x}$. Siten seuraa, että $y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Toisaalta saadaan kolmannesta yhtälöstä $y = -\frac{9}{x^2}$, elikkä $x^3 = \pm\sqrt{162}$, jolloin $x = \pm \sqrt[162]{6}$, $x^2 = 3\sqrt[3]{6}$ ja $y = 9/x^2 = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$. Nyt $f(\pm\sqrt[6]{162}, \sqrt[3]{\frac{9}{2}}, 0) = \frac{9}{2}\sqrt[3]{6} < 9$.

Koska minimipiste(id)en täytyy kuulua joukkoon

$$\left\{(0,0,\pm 3), (\pm\sqrt{2}, -1, \pm\sqrt{7}), (\pm\sqrt[6]{162}, \sqrt[3]{\frac{9}{2}}, 0)\right\},$$

ovat pisteet $(\pm\sqrt[6]{162}, \sqrt[3]{\frac{9}{2}}, 0)$ minimipisteet, ja kysytty pienin etäisyys on $\sqrt{\frac{9}{2}\sqrt[3]{6}} = 3\sqrt[6]{\frac{3}{4}} \approx 2,86$.

Katsotaan vielä, miten minimin olemassaolo voidaan todistaa: Joukko $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0 \text{ ja } x^2 + y^2 + z^2 \leq 10\}$ on rajoitettu ja suljettu (eli kompakti), joten f:llä on tässä joukossa pienin (ja suurin) arvo. Tämän joukon ulkopuolella on $f(x, y, z) > 10$ pinnalla $g(x, y, z) = 0$. Siispä f:n minimi joukossa D on f:n globaali minimi ehdolla $g(x, y, z) = 0$.

Itse asiassa pisteellä on aina pienin etäisyys suljettuun pistejoukkoon, ja pinta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y - z^2 + 9 = 0\}$ on suljettu pistejoukko $\mathbb{R}^3$:ssa.