Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Somersalo/Perämäki

Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2

1. välikoe 24.02.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Laskimen käyttö on sallittu.

1. Tutki, suppenevatko sarjat

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-n)^3 - 5}{8n^3 + 7n} \right)^{1/3}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^4}.$$

2. Olkoon avaruuskäyrä C annettu aikaparametrin t avulla muodossa

$$\vec{r}(t) = e^{-t} \cos t \vec{i} + 2e^t \sin t \vec{j} + t\vec{k}.$$

(a) Määrää käyrän tangenttivektori pisteessä, jonka paikkavektori on $\vec{r}(0)$.

(b) Olkoon lämpötila T ajan ja paikan funktiona annettu kaavalla

$$T(x, y, z, t) = xyz^2 \sin t.$$

Mikä on käyrää C kulkevan havaitsijan mittaama lämpötilan muutosnopeus hetkellä $t = 0$?

3. Olkoon

$$f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4.$$

(a) Laske funktion gradientti $\nabla f(x, y)$. Mihin suuntaan funktio f *vähenee* nopeimmin pisteessä $P = (1, 2)$?

(b) Etsi sellainen suunta $\vec{u}$, $|\vec{u}| = 1$, että f:n suunnattu derivaatta pisteessä P suuntaan $\vec{u}$ saa arvon 18.

4. Olkoot S_1 ja S_2 kaksi pintaa, jotka määräytyvät yhtälöistä

$$\begin{aligned} S_1: \quad F(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z = 0, \\ S_2: \quad G(x, y, z) &= 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 9 = 0. \end{aligned}$$

(a) Näytä, että piste $P = (1, -1, 2)$ on kyseisten pintojen leikkauskäyrällä.

(b) Etsi pinnalle S_1 pisteessä P normaalivektori ja tämän pisteen kautta kulkevan tangenttitason yhtälö.

(c) Etsi pintojen S_1 ja S_2 leikkauskäyrän tangenttivektori pisteessä P.