Mat-1.150 Reaalianalyysi

1. Välikoe 16.10.2004

Ratkaisuehdotuksia (WM)

1. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mitallinen, $|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in X$.

Määritellään joukot

$$A^+_{nj} := \left\{ x \in X : \frac{j}{2^n} \leq f(x) < \frac{j+1}{2^n} \right\},\ j = 0, 1, \ldots, 2^n$$

$$A^-_{nj} := \left\{ x \in X : -\frac{(j+1)}{2^n} < f(x) \leq \frac{-j}{2^n} \right\},\ j = 0, 1, \ldots, 2^n,$$

missä $n \in \mathbb{N}$.

Funktioille

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{j}{2^n}, & x \in A^+_{nj}, \\ -\frac{(j+1)}{2^n}, & x \in A^-_{nj}, \end{cases}$$

on voimassa

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \left| \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

ja

$$|s_n(x)| \leq |s_{n+1}(x)| \quad \text{(hahmottele konstruointi)}.$$

2.

$A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Olkoon

$$B_j = \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n .$$

Tällöin joukot B_j ovat mitallisia (eli $B_j \in \mathcal{M}$) $\forall j \in \mathbb{N}$. Edelleen

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j .$$

Koska $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$,

$$\mu(B_j) = \mu\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=j}^{\infty} \mu(A_n) \longrightarrow 0,$$

kun $j \longrightarrow \infty$. Koska

$$\mu(\limsup_{n \to \infty} A_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} A_n\right) = \mu(B_j)$$

jokaisella $j \in \mathbb{N}$, väite on todistettu.

3. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $1 \leq p < \infty$. $A_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$.

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = \int_{A_n} 1 \, d\mu$$

$$= \varepsilon^{-p} \int_{A_n} \varepsilon^p \, d\mu$$

$$\leq \varepsilon^{-p} \int_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu$$

$$= \varepsilon^{-p} \|f_n - f\|^p_{L^p(X;\mu)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = \varepsilon^{-p} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^p_{L^p(X;\mu)}$$

$$= 0.$$

4. Katso esim. Rudin, 1.26 sivulta 21.