Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 9, 17.11.2004

1. (*keskitasoa*) Olkoon λ ja m $\mathbb{R}$:n Borel-mittoja, $\lambda(A) = A$:n alkioiden lukumäärä ja m on Lebesguen mitta.

   A) Onko $\lambda \ll m$, $m \ll \lambda$ tai $\lambda \perp m$?

   B) Onko m:llä Lebesguen dekompositio
   $$m = m_s + h\lambda,$$
   missä $h \in L^1(\lambda), h \geq 0$, m_s ei-negatiivinen ja $m_s \perp \lambda$.

2. (*helppo*) Olkoon $(X, \mathbb{M}, \mu)$ σ-äärellinen positiivinen mitta-avaruus, $1 \leq p \leq \infty$ ja $f \in L^p(\mu)$. Näytä, että
   $$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q \leq 1} \int_X |fg| \, d\mu,$$
   missä $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

3. (*keskitasoa*) Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $r \in \mathbb{R}_+$. Näytä, että
   $$x \mapsto \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, dm$$
   on jatkuva.

4. (*keskitasoa*) Olkoon $\alpha \in (0,1)$. Määritellään
   $$C^\alpha = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \ : \ \sup_{t,s \in [0,1], t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}.$$
   Määritellään C^α:hen normi
   $$\|f\|_\alpha = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t,s \in [0,1], t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$
   (a) Näytä, että kyseessä todella on normi. (b) Näytä, että Hölder-jatkuvien funktioiden avaruus C^α on Banach avaruus.

5. (*vaikea*) Konstruoi kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. f on derivoituva kaikissa $x \in \mathbb{R}$, tai siis
   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
   on olemassa kaikissa $x \in \mathbb{R}$, mutta $f'(x)$ ei ole jatkuva.