Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 7, 3.11.2004

1. Todista väite: Jos $\{f_n\}$ on Cauchy-jono L^p:ssä, $1 \leq p < \infty$, niin on olemassa osajono $\{f_{n_j}\}$, joka suppenee melkein kaikkialla.

   Tehtävissä 2 ja 3 $X \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen ja $1 \leq p < \infty$.

2. Konstruoi jono funktioita $L^p(X)$:ssä s.e. se suppenee melkein kaikkialla, mutta ei $L^p(X)$:ssä.

3. Konstruoi jono funktioita $L^p(X)$:ssä s.e. se suppenee $L^p(X)$:ssä, mutta ei melkein kaikkialla.

4. Olkoon $(X, \mathbb{M}, \mu)$ täydellinen mitta-avaruus ja $1 \leq p < \infty$. Olkoon $f_n \in L^p(X)$, $n \in \mathbb{N}$, s.e. $\|f_n - f\|_p \to 0$ ja $f_n \to g$ melkein kaikkialla. Mikä yhteys vallitsee f:n ja g:n välillä ?

5. Olkoon $(X, \mathbb{M}, \mu)$ positiivinen mitta-avaruus. Joukko $\Phi \subset L^1(X)$ on tasaisesti integroituva, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$\int_E |f| \, d\mu < \varepsilon,$$

   kun $f \in \Phi$ ja $\mu(E) < \delta$. Olkoon $\mu(X) < \infty$, $\{f_n\} \subset L^1(X)$ ja $f \in L^1(X)$. Todista seuraava Vitalin suppenemislause: Jos $\{f_n\}$ on tasaisesti integroituva, $f_n(x) \to f(x)$ melkein kaikkialla, kun $n \to \infty$, niin $\|f_n - f\|_1 \to 0$, kun $n \to \infty$.