Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 4, 13.10.2004

Tämän viikon laskuharjoituksissa poikkeusjärjestely. Täydet laskaripisteet (5) saa joko tekemällä normaaliin tapaa tehtävät $1-5$ tai vaihtoehtoisesti tehtävän 6.

1. Löydä pistevieraat suljetut joukot A ja B $\mathbb{R}^2$:ssa s.e. $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.

2. Olkoon pari (X, d) metrinen avaruus varustettuna metriikalla d. Lauseen 4.15 [GZ, s.77] nojalla kaikki Carathéodory-ulkomitat ovat Borel-ulkomittoja. Todista, että kaikki X:n Borel-ulkomitat ovat Carathéodory-ulkomittoja.

3. Olkoon μ Lebesguen mitta. Olkoon $P = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 = 0\}$ 1-dimensioinen hypertaso $\mathbb{R}^2$:ssa. Näytä, että $\mu(P) = 0$.

4. Olkoon $\{E_k\}$ jono Lebesgue mitallisia joukkoja, jotka sisältyvät kompaktiin joukkoon $K \subset \mathbb{R}^n$. Oleta jollakin $\varepsilon > 0$, että $\mu(E_k) > \varepsilon$ kaikilla k. Näytä, että löytyy piste, joka kuuluu äärettömän moneen E_k.

5. Tutustu sivustoon http://www.ams.org/mathscinet. Hae ko. palvelimen avulla paperi Karl Stromberg, *The Banach–Tarski paradox.*

Tai

6. Käy läpi Karl Strombergin paperi *The Banach–Tarski paradox* ja valmistele 20 minuutin esitys asiasta. Todistuksia ei tarvitse käydä läpi, vaan riittää selittää päätulos ja lauseiden A, B ja C väitteiden idea sekä lauseen C todistuksesta ei-mitallisen joukon C idea.

[GZ] R.F. Gariepy ja W.P. Ziemer, *Modern real analysis*, 1995.