Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 3, 6.10.2004

1. Olkoon $f \in L^1(\mu)$. Todista, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$\int_E |f| \, d\mu < \varepsilon,$$

kun $\mu(E) < \delta$.

2. Todista Lebesguen dominoidun konvergenssin avulla

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk},$$

jos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty.$$

3. Olkoot $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ jono mitallisia funktioita, $g \in L^1(\mu)$ ja $f_k \geq g$ μ-melkein kaikkialla jokaisella k. Todista, että

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

4. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ ja määritellään

$$\lambda^\star(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| \ : \ I_i = [a_i, b_i], \ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}.$$

Todista, että $\lambda^\star$ on ulkomitta. Voidaanko $[a_i, b_i]$ korvata avoimella välillä (a_i, b_i)?

5. Todista Egoroffin lause: Olkoot $\mu(X) < \infty$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$ s.e. jono suppenee pisteittäin jokaisella $x \in X$. Tällöin jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa mitallinen joukko $E \subset X$, jolle $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ s.e. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti E:ssä. (Vihje: Katso Rudinin tehtävän 16 vihjettä sivulta 73.)