Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 2, 29.9.2004

1. Olkoon $\alpha > 0$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integroituva Lebesguen mitan suhteen. Näytä, että melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$ saadaan
$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

2. Olkoon X ääretön joukko. Määritellään X:n kofiniitti topologia $\mathcal{T}$ s.e. $A \in \mathcal{T}$ jos ja vain jos A^c on äärellinen tai $A = \emptyset$.
   (a) Näytä, että $\mathcal{T}$ on topologia ja X on $\mathcal{T}$:n suhteen kompakti.
   (b) Määritä $(X, \mathcal{T})$:n jatkuvat funktiot $f : X \to \mathbb{R}$.

3. Olkoon $\mathcal{T}$ luonnollisten lukujen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ kofiniitti topologia.
   (a) Mikä on $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$:n Borel-$\sigma$-algebra?
   (b) Mitkä ovat $\mathbb{N}$:n Borel-mitalliset funktiot?

4. Olkoon $\{\mu_k\}$ jono mittoja s.e. $\mu_k(E) \leq \mu_{k+1}(E)$ jokaiselle mitalliselle joukolle E. Todista, että μ on mitta, kun μ määritellään $\mu(E) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(E)$.

5. Olkoon $\mu(X) < \infty$, $\{f_n\}$ jono rajoitettuja, kompleksiarvoisia, mitallisia funktioita X:ssä s.e. $f_n \to f$ tasaisesti X:ssä. Todista, että
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu,$$
ja näytä, että oletusta $\mu(X) < \infty$ ei voida jättää pois.