Mat-1.150 Reaalianalyysi

Harjoitus 11, 1.12.2004

Ratkaisuehdotuksia (WM)

1.

Koska $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ on kasvava ja väli $[a,b]$ on kompakti, ϕ on rajoitettu. Asetetaan

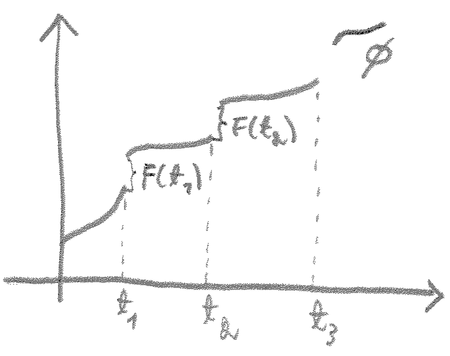
$$f(t) := \phi(t-) := \lim_{\substack{s \to t \\ s<t}} \phi(s) = \sup_{s<t} \phi(s),$$

$t \in [a,b]$. Tulkinnalla $\phi(b+) := \phi(b)$ ja $\phi(a-) := \phi(a)$ ja koska ϕ on kasvava

$$F(t) = \phi(t+) - \phi(t-) \geq 0 \qquad \forall\, t \in [a,b].$$

Olkoon $A \subset [a,b]$ äärellinen, mutta muuten mielivaltainen. Järjestetään A:n alkiot s.e. $A = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_N$. Valitaan jono $\{s_k\}_{k=0}^{N}$ s.e. $a \leq s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < \dots < t_N < s_N \leq b$. Jos $t_1 = a$, asetetaan $s_0 = t_1$; ja $t_N = b$, asetetaan $s_N = t_N$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\phi(b) - \phi(a) &\geq \phi(s_N) - \phi(s_0) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\phi(s_k) - \phi(s_{k-1}) \right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} \left(\phi(t_k+) - \phi(t_k-) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} F(t_k) = \sum_{t \in A} F(t)
\end{aligned}$$



Ottamalla supremum tällaisten äärellisten joukkojen $A \subset [a,b]$ yli, saadaan

$$\phi(b) - \phi(a) \geq \sum_{t \in [a,b]} F(t) \quad .$$

Yllä olevan nojalla, joukko $E = \{ t \in [a,b] : F(t) \neq 0 \}$ on enintään numeroituva. Jos $F(t) = 0$, $\phi(t-) = \phi(t) = \phi(t+)$ (siis ϕ on jatkuva pisteessä t), jolloin $f(t) = \phi(t-) = \phi(t)$. Koska

$$E' := \{ t \in [a,b] : f(t) \neq \phi(t) \} \subset E,$$

myös joukko E' on numeroituva.

b) Näillä oletuksilla tehtävän väite ei päde funktiolle f. Vastaesimerkiksi kelpaa Olli Pottosen esittämä funktio $f : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases} .$$

Funktio f on kasvava ja vasemmalta jatkuva, mutta jos $A_n = [0, 1 + \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \ldots$, niin

$$0 = f(x) - f(a) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 1 .$$

Esitetty mitan dekompositio on kuitenkin aina voimassa (Lebesgue-mitan suhteen).

2.

Olkoon $f \in AC([a,b])$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$, joka vastaa lukua absoluuttisesti jatkuvan funktion määritelmässä.

Jaetaan väli $[a,b]$ osiin

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

s.e.

$$t_i - t_{i-1} < \delta$$

jokaisella $i = 1, 2, \dots, N$. Rajoitutaan tarkastelemaan väliä $[t_{i-1}, t_i]$. Tällöin valitulla $\delta > 0$

$$V_f(t_{i-1}; t_i) = |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \varepsilon.$$

Näin ollen

$$V_f(a;b) = \sum_{i=1}^{N} V_f(t_{i-1}; t_i) \leq N\varepsilon < \infty.$$

3.

Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ suoristuva ja $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ jokin välin $[a,b]$ jako erillisiin väleihin. Tällöin jokaiselle $i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma(\beta_j) - \gamma(\alpha_j)| \geq \sum_{j=1}^{n} |\gamma_i(\beta_j) - \gamma_i(\alpha_j)|.$$

Näin ollen, koska jako oli mielivaltainen

$$V_{\gamma_i}(a;b) \leq \ell(\gamma) < \infty$$

jokaisella $i = 1, 2, \dots, n$.

Olkoon jokainen käyrän γ komponentti γ_i rajoitetusti heilahteleva välillä $[a,b]$ ja $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ välin $[a,b]$ jako erillisiin väleihin. Tällöin on olemassa (äärelliset) luvut $M_1, \dots, M_n$ s.e.

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma_i(\beta_j) - \gamma_i(\alpha_j)| \leq M_i \quad , i = 1, 2, \dots, n.$$

Näin ollen, kun $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$, saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} &|\gamma(\beta_j) - \gamma(\alpha_j)| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big[(\gamma_1(\beta_j) - \gamma_1(\alpha_j))^2 + (\gamma_2(\beta_j) - \gamma_2(\alpha_j))^2 + \\
&\qquad \dots + (\gamma_n(\beta_j) - \gamma_n(\alpha_j))^2 \Big]^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |\gamma_1(\beta_j) - \gamma_1(\alpha_j)| + \dots + \sum_{j=1}^{n} |\gamma_n(\beta_j) - \gamma_n(\alpha_j)| \\
&\leq M_1 + \dots + M_n = M < \infty.
\end{aligned}$$

Koska jako oli mielivaltainen, $\ell(\gamma) \leq M < \infty$.

4.

Huomataan, että jos kuvaus $f: X \to Y$, missä X on kompakti on jatkuva bijektio, f on homeomorfismi. Syy: jos $A \subset Y$ on avoin, f:n jatkuvuuden nojalla, $f^{-1}(A) \subset X$ on avoin. Jos $B \subset X$ on avoin, $X \setminus B$ on kompakti. Tällöin $f(X \setminus B) = Y \setminus f(B)$, koska f on bijektio. Siis $Y \setminus f(B)$ on kompakti; ja $f(B) \subset Y$ näin ollen avoin. Siispä $\forall B \subset X$ avoin, $f(B)$ on avoin $\Rightarrow f^{-1}$ on jatkuva.

Sanotaan, että X on homeomorfinen Y:n kanssa, $X \approx Y$, jos on olemassa jokin homeomorfismi $f: X \to Y$. Jos X on yhtenäinen ja jos $X \approx Y$, niin Y on myös yhtenäinen. Tämä on seuraus tuloksesta, että yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen:
Olkoon $f: X \to Y$ on jatkuva ja X yhtenäinen. Jos $f(X)$ ei ole yhtenäinen, niin on olemassa jatkuva surjektio $g: f(X) \to \{0,1\}$. Tällöin kuvaus

$$g \circ f_1 : X \to \{0,1\}$$

on jatkuva surjektio, missä $f_1 : X \longrightarrow f(X)$ on kuvauksen f määrittelemä. Tällöin joukot

$$A = (g \circ f_1)^{-1}(\{0\})$$

ja

$$B = (g \circ f_1)^{-1}(\{1\})$$

ovat avoimia, erillisiä ja epätyhjiä. Lisäksi $X = A \cup B$, joten X on epäyhtenäinen. Tämä on ristiriita, joten myös $f(X)$ on yhtenäinen.

(Edellä jatkuva surjektio $g : f(X) \longrightarrow \{0,1\}$ saadaan määrittelemällä $g(x) = 0$, kun $x \in C$, ja $g(x) = 1$, kun $x \in D$, missä C ja D ovat avoimia, erillisiä ja epätyhjiä s.e. $f(X) = C \cup D$.)

Nyt jos välistä $[0,1]$ poistetaan piste, saadaan epäyhtenäinen joukko. Toisaalta, jos neliöstä $[0,1]^2$ poistetaan piste, yhtenäisyys säilyy (koska neliö $[0,1]^2$ on edelleen polkuyhtenäinen) (HT: polkuyhtenäinen avaruus on yhtenäinen. Käänteinen ei päde.)

Kuitenkin yllä olevan nojalla $[0,1] \approx [0,1]^2$, mikä on ristiriita. Saadaan, että f ei voi olla bijektio.

5.

a) Olkoon $\widetilde{\mathcal{M}}$ $X \times \mathbb{R}$:n mitallisten joukkojen σ-algebra ja $\mu \times \lambda$ vastaava mitta. Asetetaan

$$W = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}.$$

Koska f on mitallinen, on olemassa jono $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ yksinkertaisia funktioita s.e.

$$0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f$$

ja

$$\lim_{k \to \infty} s_k(x) = f(x) \quad \text{pisteittäin } X\text{:ssä.}$$

Jos

$$s_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^k \chi_{E_j^k},$$

missä kullekin k joukot $\{E_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ ovat mitallisia ja erillisiä, niin

$$W_k = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 < t < s_k(x)\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^k \times (0, a_j^k) \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Koska

$$\chi_W = \lim_{k \to \infty} \chi_{W_k},$$

$W \in \widetilde{\mathcal{M}}$ (A mitallinen $\Leftrightarrow$ χ_A mitallinen).

Näin ollen

$$\int_0^\infty \omega_f(t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_X \chi_W(x,t)\, d\mu(x)\, d\lambda(t)$$

$$= \int_X \int_{\mathbb{R}} \chi_W(x,t)\, d\lambda(t)\, d\mu(x)$$

$$= \int_X \lambda(\{t \in \mathbb{R} ; 0 < t < f(x)\})\, d\mu(x)$$

$$= \int_X f\, d\mu .$$

b) Asetetaan

$$W = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} ; 0 < t < |f(x)|\} .$$

Kuvaus

$$(x,t) \longmapsto p\, t^{p-1} \chi_W(x,t)$$

on ($\overline{M}$-) mitallinen. Näin ollen

$$\int_X |f|^p\, d\mu = \int_X \int_0^{|f(x)|} p\, t^{p-1}\, d\lambda(t)\, d\mu(x)$$

$$= \int_X \int_{\mathbb{R}} p\, t^{p-1} \chi_W(x,t)\, d\lambda(t)\, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_X p\, t^{p-1} \chi_W(x,t)\, d\mu(x)\, d\lambda(t)$$

$$= p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t) .$$