Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 11 (viimeinen), 1.12.2004

1. *(keskitasoa)* Olkoon $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvava.

   (a) Näytä, että on olemassa vasemmalta jatkuva, kasvava funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ s.e. joukko $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq \phi(x)\}$ on enintään numeroituva.

   (b) Näytä, mukaillen kirjan Lauseen 7.18 todistusta, että on olemassa positiivinen Borelin mitta μ välillä $[a,b]$, jolle

   $$f(x) - f(a) = \mu([a,x]) \quad (a \leq x \leq b)$$

   ja

   $$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_d,$$

   missä μ_1 on absoluuttisesti jatkuva μ:n suhteen, μ_2 on jatkuva ja singulaarinen (μ_2 on jatkuva μ:n suhteen pisteessä x, jos $\mu_2(\{x\}) = 0$ aina kun $\mu(\{x\}) = 0$) ja μ_d on diskreetti.

2. *(helppo)* Oletetaan, että funktio f on määritelty välillä $I = [a,b]$. Funktion f kokonaisheilahtelu (*total variation*) on määritelmän mukaan

   $$V_f(a;x) = \sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_k=x} \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

   Sanotaan, että f on rajoitetusti heilahteleva (f is of *bounded variation*) välillä $[a,b]$ ($f \in \mathrm{BV}([a,b])$), jos $V_f(a;b) < \infty$. Todista

   $$\mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathrm{BV}([a,b]).$$

3. *(keskitasoa)* $\mathbb{R}^n$:n käyrällä tarkoitetaan jatkuvaa kuvausta $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ja sen pituus on määritelty

   $$l(\gamma) = \sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b} \sum_{i=1}^{k} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

   Huomaa, että $\gamma(x)$ on vektori $\mathbb{R}^n$:ssä jokaiselle $x \in [a,b]$; $\gamma(x)$ voidaan kirjoittaa

   $$\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)).$$

   Käyrä γ on suoristuva (*rectifiable*), jos $l(\gamma) < \infty$. Todista, että käyrä on suoristuva jos ja vain jos jokainen komponentti γ_i on rajoitetusti heilahteleva välillä $[a,b]$.

4. *(keskitasoa)* Surjektiivisia jatkuvia kuvauksia

$$f : [0,1] \to [0,1]^n, \quad n \geq 2$$

sanotaan Peano–käyriksi eli avaruuden täyttäviksi käyriksi (katso linkki http://www.math.ohio-state.edu/ fiedorow/math655/Peano.html). Tällaisten käyrien olemassaolo seuraa tasaisesta suppenemisesta [Gariepy–Ziemer, s. 220]. Todista, että Peano–käyrä $f : [0,1] \to [0,1]^n, n \geq 2$ ei voi olla bijektio.

5. Olkoon $(X, \mathbb{M}, \mu)$ täydellinen σ-äärellinen mitta-avaruus ja f mitallinen funktio X:ssä. Jokaiselle $t \in \mathbb{R}$ määritellään

$$E_t = \{x \in X \ : \ f(x) > t\} \in \mathbb{M}$$

ja

$$\omega_f(t) = \mu(E_t).$$

Vähenevää funktiota $\omega_f(t)$ kutsutaan funktion f jakaumafunktioksi (*distribution function*). Todista seuraavat väitteet Fubinin lauseella.

(a) Jos f on ei-negatiivinen ja mitallinen, niin

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \omega_f(t) \, dt.$$

(b) Jos f on mitallinen ja $1 \leq p < \infty$, niin

$$\int_X |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{x \in X \ : \ |f(x)| > t\}) \, dt.$$