Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 10, 24.11.2004

1. *(helppo)* Olkoon $1 < p < \infty$ ja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$. Näytä, että jos $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, kun $1 < q < p$. Lokaalisti integroituvalla funktiolla, $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, tarkoitetaan mitallista funktiota f siten että $f|_K \in L^q(K)$ jokaisella kompaktilla $K \subset \mathbb{R}^n$.

2. *(kohtalainen)* Todista seuraavat maksimaalifunktiota koskevat väitteet.

   (a) $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \implies M(f+g)(x) \le Mf(x) + Mg(x)$.

   (b) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{R} \implies M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

   (c) $f \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow Mf \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$

3. *(kohtalainen)* Olkoon $\alpha \ge 0$. Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ on Hölder-jatkuva eksponentilla α (tai Lipschitz-jatkuva eksponentilla α, tai siis $f \in \mathcal{C}^\alpha([a,b]) := \mathcal{C}^{0,\alpha}([a,b]) := \mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$) joss on olemassa vakio $L_f \ge 0$ s.e.

$$|f(x) - f(y)| \le L_f |x-y|^\alpha$$

   jokaisella $x, y \in [a,b]$. Todista seuraava väite: $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ ja $f' \in L^p([a,b]), 1 < p < \infty \implies f \in \mathcal{C}^\alpha([a,b])$, missä $\alpha = 1 - 1/p$.

4. *(helpohko)* Näytä, että $fg \in \mathrm{AC}([a,b])$, kun $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$. Muotoile ja todista osittaisintegrointia koskeva tulos (kaava) käyttämällä tätä tulosta.

5. *(vaikea)* Olkoon f Lipschitz-jatkuva funktio, määritelty $\mathbb{R}$:ssä, Lipschitz-vakiolla L_f. Todista, että

$$m(f(A)) \le L_f m(A),$$

   missä m on Lebesguen mitta ja $A \subset \mathbb{R}$ on Lebesgue-mitallinen.