Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 1, 22.9.2004

1. Olkoon
$$X = \{a, b, c, d\} \quad \text{ja} \quad \Gamma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}.$$
   (a) Onko Γ topologia X:ssä?
   (b) Onko Γ σ-algebra?
   (c) Mikä on pienin σ-algebra, joka sisältää Γ:n?
   (d) Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$. Onko f jatkuva, kun $\mathbb{R}$ varustetaan tavanomaisella topologiallaan?
   (e) Onko f Borel-mitallinen?

2. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ X:n joukkoperhe ja $\{W_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ Y:n joukkoperhe. Todista, että
$$f\left(\bigcup_\alpha V_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f(V_\alpha) \quad \text{ja} \quad f\left(\bigcap_\alpha V_\alpha\right) \subset \bigcap_\alpha f(V_\alpha)$$
ja
$$f^{-1}\left(\bigcup_\beta W_\beta\right) = \bigcup_\beta f^{-1}(W_\beta) \quad \text{ja} \quad f^{-1}\left(\bigcap_\beta W_\beta\right) = \bigcap_\beta f^{-1}(W_\beta).$$
Osoita esimerkillä, että inkluusio on aito. (Tässä $\mathcal{A}$ on jokin (indeksi)joukko ja oletetaan, että jokaista $\alpha \in \mathcal{A}$ vastaa yksikäsitteinen X:n osajoukko $V_\alpha \subset X$. Toisin sanoen, $\alpha \mapsto V_\alpha$ on kuvaus $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$.)

3. Olkoot $f : X \to [-\infty, \infty]$ ja $g : X \to [-\infty, \infty]$ mitallisia. Todista, että joukot
$$\{x \in X \ : \ f(x) < g(x)\}, \ \{x \in X \ : \ f(x) = g(x)\}$$
ovat mitallisia.

4. Olkoot $f : X \to [0, \infty]$ ja $g : X \to [0, \infty]$ mitallisia. Näytä, että tulo fg on mitallinen.

5. Olkoon $f_n : X \to \mathbb{R}$ mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Todista joukko
$$\{x \in X \ : \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ olemassa ja äärellinen}\}$$
mitalliseksi.