Matematiikan peruskurssi RM2 Weikkolainen / Malinen

Harjoituskierros 3 (vko 7/1996)

Annetut numerot viittaavat Grossman II:seen 3. painos. Suluissa vastaavat tehtävät Grossman II:sen 2. painoksesta.

Harjoitus 5 (alkuviikko).

(1) 3.6.34 (4.6.35)

(2) Joukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on **konveksi** , jos jokaiset kaksi pistettä $\bar{x}, \bar{y}$ voidaan yhdistää janalla $\bar{x}+t(\bar{y}-\bar{x})$, $t \in [0,1]$. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ avoin ja konveksi joukko, ja $f : A \to \mathbf{R}$. Osoita että $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$ kaikilla $\bar{x} \in A$ jos ja vain jos f on vakio joukossa A.

(3) 3.7.34 (4.7.29)

(4) Olkoon $z = f(x, y)$ differentioituva. Osoita että tangenttitason yhtälö pisteessä $\bar{x}_0$ on

$$z = f(\bar{x}_0) + (\bar{x} - \bar{x}_0)\nabla f(\bar{x}_0)$$

(5) 3.8.14 ja 36 (4.8.15 ja 32)

(6) 3.8.25 (4.8.18)

Demo.

Määritellään sisätulo $\mathbf{R}^n$:ssä:

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

Olkoon $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$ ja $\alpha \in \mathbf{R}$. Osoita:

(1) $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$ ja $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \implies \bar{x} = 0$ (pos. definiitti)

(2) $\bar{x} \cdots \bar{y}\bar{y} \cdot \bar{x}$ (kommutatiivinen)

(3) $\alpha(\bar{x} \cdot \bar{y}) = (\alpha \cdot \bar{x}) \cdot \bar{y})\bar{x} \cdot (\alpha \cdot \bar{y})$ (homogeeninen)

(4)

$$\begin{cases} \bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z} \\ (\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z} \end{cases} \quad \text{(distributiivinen)}$$

Määritellään vektorin pituus l. normi: $|x| = \sqrt{x \cdot x}$. Osoita:

(1) $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}|\,|\bar{y}|$ (Schwartzin epäyhtälö)

(2) $|\bar{x}| \geq 0$, $|\bar{x}| = 0 \implies \bar{x} = 0$,

(3) $|\alpha\bar{x}| = |\alpha|\,|\bar{x}|$

(4) $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$ (kolmioepäyhtälö)

(5) $||\bar{x}| - |\bar{y}|| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$

(6) On olemassa yksikäsitteinen $\phi \in [0, \pi]$ s.e. $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}|\,|\bar{y}| \cos\phi$. Lukua ϕ kutsutaan vektoreiden $\bar{x}, \bar{y}$ cäliseksi kulmaksi. Erityisesti jos $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$ ja $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$, sanotaan ko. vektoreita keskenään kohtisuoriksi (ortogonaalisiksi).

Harjoitus 6 (loppuviikko).

(1) 3.9.15 (4.10.27)
(2) 3.10.12 (4.12.12)
(3) 3.10.19 (4.12.19)
(4) 3.10.36 (4.12.32)
(5) Olkoon $f(x, y) = 5 \pm (4x^2 - 4xy + y^2)$. Osoita että kummassakin tapauksessa kriittisiä pisteit on ärettömän monta, ja $D = 0$ kriittisissä pisteissä. Onko ääriarvoja? Laatu?
(6) Ratkaise tehtävä 3.10.19 ja 21 (4.12.19 ja 20) käyttäen Lagrangen kertojia.