Matematiikan peruskurssi RM2 Weikkolainen / Malinen

Harjoituskierros 7 (vko 11/1996)

Annetut numerot viittaavat Grossman II:seen 3. painos. Suluissa vastaavat tehtävät Grossman II:sen 2. painoksesta.

Harjoitus 13 (alkuviikko).

(1) Laske seuraavat pinnalla $z = z(x, y)$ olevien pintapalojen pinta-alat pintaintegraalina (Ω tarkoittaa tarkasteltavan pintapalan S projetiota xy-tasolle, siis $\Omega \subset \mathbf{R}^2$).

(2) $z = 4x + 7y$, Ω on käyrien $y = x^3$ ja $y = x^5$ väliin jäävä osa. (5.5.12)

(3) $z = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$, $\Omega = \{(x, y) | -4 \leq x \leq 7, \quad 0 \leq y \leq 3\}$ (5.5.17)

(4) Pallon $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ sylinterin $x^2 + y^2 = ry$ sisään jäävän osan ala.

(5) 5.6.1 (6.5.1)

(6) 5.6.3 (6.5.4)

(7) 5.6.10 (6.5.11)

Demo. Osoita, että jos yz-tason differentioituva käyrä $z = f(y) \geq 0$, $y_1 \leq y \leq y_2$ pyörähtää z-akselin ympäri, niin muodostuvan alueen S pinta-ala on

$$\iint_S d\sigma = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy$$

Harjoitus 14 (loppuviikko).

(1) 5.6.18 (6.5.20)

(2) 5.6.24 (6.5.24)

(3) 5.6.30 (6.5.29)

(4) 5.7.9 (6.6.9)

(5) 5.7.22 (6.6.21)

(6) Vektorikenttä $\bar{F} : V \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ on <u>lähteetön</u> (incompressible), jos $\nabla \cdot \bar{F} = 0$. Vektorikenttä $\bar{F} : V \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ on <u>pyörteetön</u>, jos $\nabla \times \bar{F} = \bar{0}$ ($\bar{F}$ "riittävän säännöllinen"). Osoita että gravitaatiokenttä

$$\bar{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\bar{x}|^3}\bar{x}$$

on pyörteetön.

Demo. Olkoon $S \subset \mathbf{R}^3$ (sileä) pintapala, ja $\rho(x, y, z)$ pintapalan pintatiheys. Perustelle, että pintapalan massa $m = \iint_S \rho\, d\sigma$.

Demo. Tasointegraalilla on

a) lineaarisuusominaisuus:

$$\iint_\Omega (f + g)\, dA = \iint_\Omega f\, dA + \iint_\Omega g\, dA$$

$$\iint_\Omega (\alpha f)\, dA = \alpha \iint_\Omega f\, dA$$

b) additiivisuusominaisuus integroimisalueen suhteen:

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f\, dA = \iint_{\Omega_1} f\, dA + \iint_{\Omega_2} f\, dA, \quad (\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset)$$

c) monotonisuusominaisuus: $f \leq g \implies$

$$\iint_\Omega f\, dA \leq \iint_\Omega g\, dA$$

Erikoisesti siis $|\iint_\Omega f\, dA| \leq \iint_\Omega |f|\, dA$. Formuloi ja "perustele" samat asiat pinta- ja avaruusintegraalille. Miten edellä esitetty soveltuu viivaintegraaliin ja vuointegraaliin $\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma$?