Matematiikan peruskurssi RM2 Weikkolainen / Malinen

Harjoitustkierros 7 (vko 10/1996)

Annetut numerot viittaavat Grossman II:seen 3. painos. Suluissa vastaavat tehtävät Grossman II:sen 2. painoksesta.

Harjoitus 11 (alkuviikko).

(1) 5.2.17 (6.2.9)
(2) 5.2.35 (6.4.3)
(3) 5.3.17 (6.2.21)
(4) 5.3.28 (6.2.29)
(5) 5.3.25 (6.4.5)
(6) a) Olkoon C avaruuden $\mathbf{R}^3$ <u>koordinaattimurtoviiva</u>

$$(x_1, y_1, z_1) \to (x_2, y_1, z_1) \to (x_2, y_2, z_1) \to (x_2, y_2, z_2)$$

Olkoon $\bar{F}(\bar{x}) = P(\bar{x})\bar{i} + Q(by)\bar{j} + R(bz)\bar{k}$. ja

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{x} = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1, z_1)\, dx + \int_{y_1}^{y_2} (x_2, y, z_1)\, dy + \int_{z_1}^{z_2} (x_2, y_2, z)\, dz$$

b) Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituva. Käyrä $C : (x, f(x)), x \in [a, b]$ on siis avaruuden $\mathbf{R}^2$ sileä käyrä. Osoita:

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{x} = \int_b^a P(x, f(x))\, dx + \int_b^a Q(x, f(x)) f'(x)\, dx$$

Demo. Olkoon $\bar{x}_1(t), t \in [a, b]$ ja $\bar{x}_2(t), t \in [c, d]$ kaksi sileää käyrää (taso tai avaruuskäyrää). Sanomme että sileät käyrät $\bar{x}_1$ ja $\bar{x}_2$ ovat <u>eksivalentteja</u>, jos on olemassa aidosti kasvava, jatkuvasti derivoituva $\tau : [c, d] \to [a, b]$ s.e. $\bar{x}_2(t) = \bar{x}_1(\tau(t)), t \in [a, b]$. (Huom! Jos $\bar{x}_1$ ja $\bar{x}_2$ ovat ekvivalentteja edellisen määritelmän mielessä, niin myös $\bar{x}_2$ ja $\bar{x}_1$ ovat eksivalentteja; ei todisteta). Osoita: Jos $\bar{F}$ on jatkuva alueessa Ω, joka sisältää käyrän $\bar{x}_1$, niin

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{x}_1(t)) \cdot \bar{x}_1'(t)\, dt = \int_c^d \bar{F}(\bar{x}_2(t)) \cdot \bar{x}_2'(t)\, dt$$

t.s. viivaintegraali on (eräässä mielessä) <u>käytetystä parametrista riippumaton</u>

Harjoitus 12 (loppuviikko).

(1) 5.4.3 (6.3.3)
(2) 5.4.15 (6.3.15)
(3) 5.4.19 (6.3.18)
(4) 5.4.22 (6.3.28)
(5) Parametrisoi pinnat
a) taso

$$x - 2y + 5z = 0$$

b) puolipallo

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0$$

c) kartion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ se osa, joka jää lieriön $x^2 + y^2 = 9$ sisälle ja on tason $z = 0$ yläpuolelle.

(6) Parametrisoi torus: yz-tason ympyrä

$$y^2 + (z - R)^2 = r^2, \quad r \leq R$$

pyörähtää y-akselin ympäri.

Demo. Olkoon P jatkuva alueessa $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ joka sisältää käyrän $(x, f(x)), x \in [x_1, x_2]$. Olkoon f jatkuvasti derivoituva ja aidosti kasvava. Tällöin funktiolle f on jatkuvasti derivoituva aidosti kasvava käänteiskuvaus $g : [f(x_1), f(x_2)] \to [x_1, x_2]$. Osoita:

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x, f(x)) f'(x)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} P(g(y), y)\, dy$$

Miten tämä liittyy Greenin lauseeseen?