Mat-1.342/352 Matematiikan pk PM 2/RM 2 Weikkolainen/Högnäs
Tietokoneharjoitus 2 (vko 15, 1997–04–07...11)

Kurssiesitteestä poiketen molemmat tietokoneharjoitukset tapahtuvat Mathematica–ohjelmalla, joka käynnistetään Maarintalon päätteillä seuraavasti:

```
use mathematica <return>
math <return>
```

Poistuminen tapahtuu komennolla `Exit` (huomaa iso alkukirjain). Opastusta Mathematican käyttöön löytyy kirjasta

Laukkanen, Petri: *Johdatusta Mathematica–ohjelmiston käyttöön*, Otatieto, 1994.
Ruskeepää, Heikki: *Mathematica–opas*, Versio 2.2, Turun Yliopisto, Sovellettu matematiikka 1993.

Jollei ole aikaisemmin tutustunut Mathematicaan on syytä lukea Laukkasen oppaan alku, sivut 3-11 ja 15-20. Yleisopastusta sähköisessä muodossa saa käyttöönsä komennolla

`more /p/edu/matpk/t/mathematica.alkeisopas`.

Tehtävät

1. Funktion $f(x)$ voi itse määritellä esim. seuraavasti (Laukkanen, s. 50 alkaen)

   `f[x_]:=x^2 Sin[x]`.

   Vastaavasti usean muuttujan vektoriarvoiset funktiot, esim.

   `g[x_,y_,z_]:={x^2+y^2+z^2, x y z}` .

   a) Määrittele $f(x,y,z) = x^2y/z$
   b) Laske $\frac{\partial f}{\partial x}$, $f(1,2,3)$
   c) Määrittele $\mathbf{g}(x,y,z) = (x^2y/z, z\sin(xy), x)$
   d) Laske $\int \mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x}$ pitkin spiraalia $(\cos t, \sin t, t)$, $t:\ (1,0,0) \mapsto (1,0,2\pi)$

2. (Vrt Ruskeepää, s. 75) Seuraavilla funktioilla voi laskea usean muuttujan funktion gradientin ja Jacobin matriisin sekä determinantin

   ```
   grad[f_,xs_]:=Map[D[f,#]&,xs]
   jacobian[f_,xs_]:=Outer[D,f,xs]
   funkdet[f_,xs_]:=Det[Outer[D,f,xs]],
   ```

   ja edelleen vektorifunktion divergenssi

   `div[f_,xs_]:=Inner[D,f,xs,Plus]`.

   Kokeile

   a) `grad[x^2 y/z,{u,v,w}]`
   b) `jacobian[{u^2 v/w, w Sin[u v]}, {u,v,w}]//MatrixForm`

3. Laske funktion $f(x,y,z) = (xyz, \sin x + yz^2, x+y+z)$
   a) divergenssi
   b) funktionaalideterminantti
   c) Jacobin matriisi (jonka saat matriisimuotoon komennolla `//MatrixForm`)
   d) funktionaalideterminantti pisteessä $(1,2,3)$.
   (Opastus: `lauseke/.{x→1,y→2,z→3}`.)

4. Olkoon f jokin lauseke, esimerkiksi `f={x y^2 sin[y z] , y, 1/z}`. Muodosta funktio joka laskee edellisen tyyppisen lausekkeen roottorin (muuttujina siis x, y, z). Siis

   `rot[f_]:={ D...,...,...}` .

Kokeile yllä olevaan lausekkeeseen (tai johonkin muuhun sopivaan) sekä tarkasta oliko tulos oikein. Huom! Edellinen löytyy Mathematican paketista

`<<Calculus`VectorAnalysis``.

Kyseinen paketti on varsin monipuolinen, sisältäen myös Jacobin matriisin ja determinantin ym. ym.

5. Tutustu `DSolve`n käyttöön (`??DSolve`) ja ratkaise sen avulla seuraavat tehtävät. Mieti mitä menetelmää kunkin tehtävän kohdalla käyttäisit ilman tietokonetta.
   a) $y' = 100(\sin x - y)$ (`DSolve[y'[x]==100 (sin[x]-y[x]), y[x], x]`)
   b) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 5x^2$
   c) $xy' + (x-4)y = 0$, $y(1) = 0.4$ (`DSolve[{x y'[x]+(x-4) y[x]==0, y[1]=.4}, y[x], x]`)
   Piirrä c)–kohdan kuvaaja esim. välillä $[1, 10]$.

6. Tutustu `NDSolve`n käyttöön ja ratkaise sen avulla seuraavat tehtävät:
   a) $y' = \sin x$ ja $y' = \sin y$, $y(0) = 0$ välillä $[0, 5]$
   b) $y'' = (1 - x^2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ välillä $[0.5]$
   c) $y' = x(y)^2 + x^2$, $y(-2) = 1$ tai $y(-2) = 2$ välillä $[-2, 1]$.
   Piirrä tulosten kuvaajat. c)-kohdan kuvaajat myös samaan kuvaan. Kokeile myös alkuehtojen muuttamisen vaikutusta ratkaisuun.

   Ohje tehtäviin 5 ja 6: `DSolve` ja `NDSolve` antavat tuloksen muodossa `{y[x]` $\rightarrow$ `...}`. Saat piirrettyä kuvan tuloksesta antamalla ensin komennon `ratk=y[x]/.%[[1]]` ja sitten `Plot[ratk,{x,a,b}]`, jossa välin $[a, b]$ on `NDSolve`n tapauksessa syytä olla sama kuin itse komennossa.

Lasketaan niin monta tehtävää kuin ehditään.