Mat-1.342/352 Matematiikan pk PM 2/RM 2 Weikkolainen/Högnäs
Harjoituskierros 8 (vko 12, 1997-03-17...21)

Tehtävien kohdalla mainitut numerot viittaavat kurssikirjan Grossman: *"Multivariable Calculus ..."* 3rd ed. (suluissa 2nd ed.) kappaleisiin ja tehtäviin.

Harj. no. 15 (Alkuviikko)

1. 5.6.18 (6.5.20)
2. 5.6.24 (6.5.24)
3. 5.6.30 (6.5.29)
4. 5.7.28 ja 5.7.29 a) Onko vektorikenttä (vuo) $\mathbf{G}(x,y,z) = e^x \sin x\,\mathbf{i} + y^{\frac{5}{2}}\,\mathbf{j} + \overline{\text{arc}}\tan z\,\mathbf{k}$ pyörteetön?
   b) Näytä että vektorikenttä $\mathbf{F}(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{i} - x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$ on lähteetön.
5. Laske $\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}\sigma$, $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1 \wedge 0 \le z \le 1\}$
6. R–säteisen pallon pinnalle on homogeenisesti levitetty massa m (pintatiheys ρ). Laske hitausmomentti halkaisijan suhteen. (Hitausmomentti z–akselin suhteen on $I_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}\sigma$.)

Demo 1. a) Vektorikenttä $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ on *lähteetön* jos $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ja *pyörteetön* jos $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Osoita että gravitaatiokenttä

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|$$

on lähteetön ja pyörteetön.

b) Hae funktion $\mathbf{F}$ (skalaari) potentiaali f.

c) Osoita, että yleisesti $\nabla \times \nabla f = 0$ ja $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Harj. no. 16 (Loppuviikko)

1. 5.8.1 (6.7.1)
2. 5.8.5 (6.7.5)
3. 5.9.1 ja 5.9.3 (6.8.1 ja 6.8.3)
4. 5.9.15 (6.8.15)
5. 5.9.18–20 (6.8.17–19)
6. 5.10.14 ja 5.10.17 (6.9.14 ja 6.9.17)

Demo 1. Laske a) suoraan viivaintegraalina b) Stokesin lauseen avulla $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$, kun $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + (xz^2 - 3y)\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$ ja $C : \mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$, $t : 0 \to 2\pi$.

Demo 2. 5.10.20 (6.9.23)

Demo 3. 5.10.26 (6.9.26)