Mat-1.342/352 Matematiikan pk PM 2/RM 2 Weikkolainen/Högnäs
Harjoituskierros 7 (vko 11, 1997.03.10...14)

Harj. no. 13 (Alkuviikko)

1. 5.4.3 (6.3.3)
2. 5.4.15 (6.3.15)
3. 5.4.19 Laske Greenin kaavan avulla sen nelisivukkaan pinta-ala, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0)$, $(2,1)$, $(-1,3)$ ja $(4,4)$.
4. Määritellään funktion $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ integraali *kaarenpituuden suhteen* (pitkin käyrää C : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$; $t : a \to b$) kaavalla
$$\int_C \mathbf{F}\,\mathrm{d}s = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))|\mathbf{x}'(t)|\,\mathrm{d}t.$$
(Myös merkintää $\int_C \mathbf{F}|\,\mathrm{d}\mathbf{x}|$ käytetään.) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ "riittävän säännöllinen" (so. tarvittavien lauseiden kaikki oletukset voimassa) tasoalue, jonka reunakäyrä on $\partial\Omega$. Olkoon $\mathbf{T}$ käyrän $\partial\Omega$ yksikkötangenttivektori ja $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2\mathbf{x}$ Osoita että $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = 0$.
5. Parametrisoi pinnat a) $x - 2y + 5z = 0$ b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x, y, z \geq 0$ c) kartion $z^2 = x^2 + y^2$ se osa joka jää lieriön $x^2 + y^2 = 9$ sisälle ja on tason $z = 0$ yläpuolella d) *torus*: yz–tason ympyrä $y^2 + (z - R)^2 = r^2$, $r \leq R$ pyörähtää y–akselin ympäri.

Demo 1. Olkoon $f : [x_1, x_2] \mapsto \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva ja aidosti kasvava. Olkoon $P : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ jatkuva alueessa Ω, joka sisältää käyrän $C :\ (x, f(x)),\ x \in [x_1, x_2]$. Tällöin funktiolla f on jatkuvasti derivoituva, aidosti kasvava käänteiskuvaus $g : [y_1, y_2] \mapsto [x_1, x_2]$ ($f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$). (Ei todisteta.) Osoita:
$$\int_{x_1}^{x_2} P(x, f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{y_1}^{y_2} P(g(y), y)\,\mathrm{d}y.$$
Miten tämä liittyy Greenin lauseen todistukseen (Grossman, 3rd ed., p. 315)?

Demo 2. Olkoon $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ vektorikenttä, P, Q, P_y, Q_x jatkuvia jossakin avoimessa ympyrässä B. Olkoon lisäksi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tässä ympyrässä. Osoita, että on olemassa differentioituva $f(x, y)$ s.e. $\mathbf{F} = \nabla f$ ympyrässä B.

Harj. no. 14 (Loppuviikko)

Tehtävissä 1-3 haetaan pinnalla $z = z(x, y)$ olevien pintapalojen S pinta-alat pintaintegraaleina (seuraavassa Ω tarkoittaa pintapalan S projektiota xy–tasolle).

1. 5.5.12 $z = 4x + 7y$, Ω on käyrien $y = x^3$ ja $y = x^5$ väliin jäävä osa.
2. 5.5.17 $z = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $\Omega = \{(x, y) \mid -4 \leq x \leq 7,\ 0 \leq y \leq 3\}$.
3. Pallon $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ sylinterin $x^2 + y^2 = ry$ sisään jäävän osan ala.
4. 5.6.3 (6.5.4)
5. 5.6.10 (6.5.11)

Demo 1. Luennoilla todettiin $\iint_\Omega \mathrm{d}A = \oint_{\partial\Omega}(-y)\,\mathrm{d}x$. Olkoon edellä Ω käyrän $y = f(x) > 0,\ x \in [a, b]$ ja x–akselin väliin jäävä pintapala. Miten yllä oleva oleva jälkimmäinen pinta-ala suhtautuu jo koulussa opittuun pinta-alaan $\int_a^b y\,\mathrm{d}x$?

Demo 2. Olkoon $z = f(y) \geq 0,\ y \in [y_1, y_2]$ yz–tason käyrä (f jatkuvasti derivoituva). Käyrä pyörähtää y–akselin ympäri. Osoita, että muodostuneen alueen S pinta-ala on
$$\iint_S \mathrm{d}\sigma = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} f(y)\sqrt{1 + f'(y)^2}\,\mathrm{d}y.$$