Mat-1.342/352 Matematiikan pk PM 2/RM 2 Weikkolainen/Högnäs
Harjoituskierros 6 (vko 10, 1997-03-03...07)

Harj. no. 11 (Alkuviikko)

1. 4.5.11 (5.6.9)
2. 4.5.26 (5.6.18)
3. 4.6.5 (5.7.10)
4. 4.6.13 (5.7.19)
5. 5.2.11 (6.2.3)

Demo 1. Laske

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{1+x\sqrt{2}}\,\mathrm{d}A,$$

kun $\Omega = \{(x,y) \mid x \le y \le \sqrt{1-x^2} \wedge y \ge 0\}$.

Demo 2. Käyrä $y = f(x) > 0,\ a \le x \le b$ pyörähtää x-axelin ympäri. Totea, että

$$\iiint_V \mathrm{d}V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

Harj. no. 12 (Loppuviikko)

1. 5.2.17 (6.2.9)
2. 5.2.35 Hiukkanen liikkuu pitkin elliptistä spiraalia $\mathbf{x}(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} + 4(\sin t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$. Siihen vaikuttaa voima jota kuvaa vektorikenttä $x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}$. Mikä on voiman tekemä työ, kun hiukkanen siirtyy pisteestä $(1,0,0)$ pisteeseen $(0,4,\pi/2)$?
3. 5.3.17 (6.2.21)
4. 5.3.28 (6.2.29)
5. 5.3.25 (6.4.5)

Demo 1. a) Olkoon C avaruuden $\mathbb{R}^3$ koordinaattimurtoviiva $(x_1,y_1,z_1) \mapsto (x_2,y_1,z_1) \mapsto (x_2,y_2,z_1) \mapsto (x_2,y_2,z_2)$. Olkoon $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})\,\mathbf{i} + Q(\mathbf{x})\,\mathbf{j} + R(\mathbf{x})\,\mathbf{k}$. Osoita

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1,z_1)\,\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2,y,z_1)\,\mathrm{d}y + \int_{z_1}^{z_2} R(x_2,y_2,z)\,\mathrm{d}z.$$

b) Olkoon $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva. Käyrä $C : \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\}$ on siis avaruuden $\mathbb{R}^2$ sileä käyrä. Osoita:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^b P(x,f(x))\,\mathrm{d}x + \int_a^b Q(x,f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demo 2. Määr.: Olkoot $\mathbf{x}_1(t),\ t \in [a,b]$ ja $\mathbf{x}_2(t),\ t \in [c,d]$ kaksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ sileää käyrää. Sanomme että käyrät ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa aidosti kasvava, derivoituva funktio $\tau : [c,d] \mapsto [a,b]$ siten että $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_1(\tau(t)),\ t \in [c,d]$.

Olkoot $\mathbf{F} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ jatkuva alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja käyrä $\mathbf{x}_1$ alueessa Ω. Osoita:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(t))\cdot \mathbf{x}_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{x}_2(t))\cdot \mathbf{x}_2'(t)\,\mathrm{d}t,$$

ts. viivaintegraali on (eräässä mielessä) *parametriesityksestä riippumaton.*