Mat-1.342/352 Matematiikan pk PM 2/RM 2 Weikkolainen/Högnäs
Harjoituskierros 3 (vko 7, 1997.02.10 . . . 14)

Tehtävien kohdalla mainitut numerot viittaavat kurssikirjan Grossman: *"Multivariable Calculus . . . "* 3rd ed. (suluissa 2nd ed.) kappaleisiin ja tehtäviin.

Harj. no. 5 (Alkuviikko)

1. 3.6.36 Funktio f(x,y) on *n:n asteen homogeenifunktio*, mikäli $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ kaikilla $x, y, t \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos f on n:n asteen homogeenifunktio, niin
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$
Formuloi vastaava kaava funktiolle $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.
2. 3.6.34 (4.6.35)
3. 3.6.28 (4.6.28)
4. 3.7.33 (4.7.28)
5. 3.7.22 (4.7.24)

Demo 1. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *konveksi*, jos jokaiset kaksi pistettä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ voidaan yhdistää janalla $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}), t \in [0, 1]\}$ joka kuuluu joukkoon A.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja konveksi. Olkoot $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ ja voimassa $\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla g(\mathbf{x})$ kaikilla $\mathbf{x} \in A$. Osoita, että on olemassa vakio c siten, että $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c$ kaikilla $\mathbf{x} \in A$.

Demo 2. 3.6.40 Osoita, että (riittävän säännöllisen) pintapalan $z = f(x, y)$ tangenttitaso pisteessä (x_0, y_0, z_0) saadaan muotoon
$$z = f(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) \quad (\mathbf{x} = (x, y),\ \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)).$$

Harj. no. 6 (Loppuviikko)

1. 3.7.34 (4.7.29)
2. 3.7.36 (4.7.31)
3. 3.8.14 ja 3.8.36 (4.8.15 ja 4.8.32)
4. 3.8.25 (4.8.18)
5. 3.9.15 (4.10.27)

Demo 1. Todista Cauchy–Schwartzin epäyhtälö
$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|, \quad \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$
ja edelleen kolmioepäyhtälö
$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$
ja epäyhtälöt
$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \le |\mathbf{x} \ \pm \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$
Miten määriteltäisiin kahden vektorin $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma φ? Entä *kohtisuoruus* (eli *ortogonaalisuus*)?