1 Funktiot Mathematicassa

Aiemmin käsittelimme muuttujien käyttöä, mutta käyttökelpoisessa ohjelmointikielessä täytyy luonnollisesti myös olla mahdollisuus määritellä omia funktioita. Mathematican tapauksessa asia hoituu tähän tapaan:

```
f[ x_, y_] = Sin[ x] + 2 y
```

Huomaa yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella alaviivat, jotka osoittavat funktion argumentit.[1]

Ylläoleva lauseke määrittelee itse asiassa korvaussäännön, jonka mukaan lauseke `f[` x`,` y`]`, jossa x ja y ovat mielivaltaisia Mathematica-lausekkeita, korvataan yhtäläisyysmerkin oikean puolen lausekkeella, jossa puolestaan `x` ja `y` korvataan funktion kutsussa esiintyneillä argumenteilla x ja y. Periaatteessa funktiot ja tavanomaiset muuttujat käsitellään samalla tavalla, jälkimmäisissä vain ei esinny argumentteja.

Niinpä esimerkkimme funktionmäärittelyn voi kumota lausekkeella `f[ x_, y_] =.`, kuten tavanomaisten muuttujienkin yhteydessä. Tällöin on kuitenkin käytettävä täsmälleen samoja nimiä argumenteille kuin alkuperäisessä määrittelyssä. Tämä on usein vaivalloista, varsinkin jos funktio on määritelty useamman säännön avulla (mitä emme näissä harjoituksissa tee), jolloin jokainen sääntö täytyisi poistaa erikseen. Helpompaa on yleensä käyttää funktioiden siivoamiseen `Clear`ia tai `Remove`a, joilla syntyy puhdasta jälkeä sangen ripeästi.

Yhden muuttujan funktioiden derivaatoille voi käyttää perinteistä notaatiota. Kokeile seuraavaa:

```
f[ x_] = Sin[ x]
f[ Pi / 2]
f'[ x]
f''[ x]
```

Poista lopuksi `f`:ään liittyvät määrittelyt `Clear`illa.

2 Käyräteoriaa

Vektoriarvoisen funktion voi nyt määritellä ilmeisellä tavalla;

```
f[ t_] = {E^t Cos[ t], E^t Sin[ t], E^t}
```

määrittelee aiemmin perinteisissä harjoituksissa esiintyneen käyrän. Laske sille yksikkötangentti- ja pääyksikkönormaalivektorit t:n funktioina. Vihjeitä:

- Kannattaa aloittaa määrittelemällä funktio, joka laskee annetun vektorin pituuden sisätulon avulla (tällaista ei yllättäen ole valmiina). Sen avulla voi määritellä toisen funktion, joka palauttaa annetun vektorin suuntaisen yksikkövektorin.
- `Simplify` on tarpeen tulosten sieventämiseksi. `PowerExpand`ia voi käyttää neliöjuurilausekkeiden sieventämiseen, mutta tällöin on syytä olla itse tarkkana juurrettavien etumerkkien suhteen (Mathematica olettaa `PowerExpand`ia käytettäessä surutta, että $\sqrt[n]{x^n} = x$).
- Voit myös yrittää piirtää käyrää funktiolla `ParametricPlot3D`, mutta havainnollisen kuvakulman löytäminen (ja ylipäänsä kuvakulman muuttaminen) saattaa olla hankalaa.

3 Integrointia

Symbolinen integrointi tapahtuu Mathematicassa funktiolla `Integrate`, jolla lasketaan niin määräämättömät kuin määrätytkin integraalit. Laske seuraavat:

$$\text{(a)}\ \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)}\ \int e^x \sin ax\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(c)}\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d)}\ \int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Kokeile myös näitä:

$$\text{(e)}\ \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{(f)}\ \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{(g)}\ \int_0^{1} \ln\sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{(h)}\ \int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x.$$

(Itseisarvojen käsittely on Mathematicalle usein vaikeaa.) Laske näille integraaleille numeeriset likiarvot funktiolla `N`. Funktiolla `NIntegrate` voit myös integroida suoraan numeerisesti yrittämättä edes löytää symbolista ratkaisua.

[1] Ongelmia aiheutuu, jos argumenttien nimet sattuvat olemaan käytössä globaaleina muuttujina: ne korvataan tällöin arvoillaan yhtäläisyysmerkin oikealla puolella ennen sijoituksen tapahtumista. Tämän voi estää käyttämällä yhtäsuuruusmerkin sijaan operaattoria `:=`, joka estää oikean puolen arvon laskemisen ennen sijoitusta.

4 Taylorin polynomit

Taylorin polynomeja saa näppärästi laskettua funktiolla `Series`. Jäännöstermiä kuvaavan `O[`x`^`n`]`-lausekkeen saa poistettua funktiolla `Normal`. Laske seuraavien funktioiden kuudennen asteen Taylorin polynomit origossa kehitettynä. Piirrä samaan kuvaan polynomi ja alkuperäinen funktio välillä $[-0.999, 0.999]$.

(a) $f(x) = \ln(1+x)$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (c) $f(x) = \arcsin x$.

5 Yhtälöiden ratkaisu

Yhtälöiden ratkaisu symbolisesti tapahtuu yleensä funktiolla `Solve`, jolle annetaan yhtälö[2] (tai lista yhtälöistä) ja muuttuja (tai lista muuttujista), jonka suhteen yhtälö halutaan ratkaista. `Solve` palauttaa listan löytämistään ratkaisuista. Jokainen ratkaisu puolestaan on lista korvaussäännöistä muotoa x `->` y. Tällainen sääntö tarkoittaa, että muuttujalle x on annettava arvo y. Näitä korvaussääntöjä Mathematica ei sovella automaattisesti samaan tapaan kuin sijoituslausekkeilla muuttujiin liitettyjä sääntöjä, vaan korvaussääntöjä voi soveltaa haluamaansa lausekkeeseen operaattorilla `/.` seuraavaan tapaan (kokeile):

```
ratk = Solve[ a x^2 + b x + c == 0, x]
x /. ratk
x /. ratk[[1]]
a x^2 + b x + c /. ratk
% //Simplify
```

(x`//`f tarkoittaa samaa kuin f`[`x`]`. Ensinmainittua muotoa voi käyttää vain yhden muuttujan funktioille, joiden yhteydessä se on kuitenkin toisinaan kätevä.)

`Solve` ei välttämättä aina löydä kaikkia ratkaisuja. Kokeile ratkaista seuraavia x:n suhteen:

(a) $\sin x = 0$ (b) $|x| = 1$ (c) $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.

6 Lisää käyräteoriaa

Piirrä annetut käyrät ja niiden derivaatat (`ParametricPlot`illa). Laske käyrien pituudet (numeerisesti, jos ei muuten onnistu).

(a) $\mathbf{f}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$
(b) $\mathbf{f}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$, $t \in [0, 8\pi]$
(c) $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$
(d) $(y+1)^2 = 4x^3$, $x \in [0, 2]$.

Viimeisessä kohdassa ratkaise ensin yhtälöstä y (sujuu näppärästi `Solve`lla). Esitä sitten käyrä sopivasti parametrisoituna vektorimuodossa.

[2] Muista, että yhtäsuuruusmerkkinä on `==` eikä sijoitusta merkitsevä `=`.